Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

CLASA a XII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm funcţia $f_n : [0, n] \to \mathbb{R}$ dată de $f_n(x) = \operatorname{arctg}([x])$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Să se arate că f_n este integrabilă şi să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f_n(x)\mathrm{d}x$.

Soluţie. Funcţia f_n este egală cu constanta $f_n(i)$ pe $[i, i+1] \setminus \{i+1\}$, $i \in \overline{0, n-1}$, deci este integrabilă pe fiecare interval $[i, i+1]$.

.... **2p**

Apoi

$$\int_0^n f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k-1} \int_i^{i+1} f_n(i)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{arctg} i.$$

.... **3p**

Folosind teorema Stolz-Cesaro, limita cerută este

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \ldots + \operatorname{arctg} n}{n} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}.$$

.... **2p**

Problema 2. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, cu derivata continuă şi fie $s_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Să se arate că şirul $(s_{n+1} - s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent către $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Soluţie. Folosind teorema lui Lagrange, obţinem

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \sum_{k=1}^{n+1} f\Big(\frac{k}{n+1}\Big) - \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = f(1) - \sum_{k=1}^{n}\Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f\Big(\frac{k}{n+1}\Big)\Big) \\ &= f(1) - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k f'(x_k),\ \frac{k}{n+1} < x_k < \frac{k}{n},\ k = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

.... **3p**

Dacă $f' \geq 0$, atunci $\dfrac{x_k f'(x_k)}{n+1} \leq \dfrac{k f'(x_k)}{n(n+1)} \leq \dfrac{x_k f'(x_k)}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, deci $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k f'(x_k) < \dfrac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k f'(x_k) \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k f'(x_k)$. Deoarece

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reprezintă o familie de puncte intermediare asociate diviziunii $(0, 1/n, 2/n, \ldots, n/n)$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k f'(x_k) = \int_0^1 x f'(x)\mathrm{d}x = x f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

de unde concluzia.

....**3p**

În cazul în care există şi puncte în care f' ia valori negative, înlocuim f cu $g : x \mapsto f(x) + Mx$, unde $M = \sup|f'|$. Conform celor de mai sus, pentru $t_n = \sum_{k=1}^{n} g(\frac{k}{n})$ avem $(t_{n+1} - t_n)_n \to \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{M}{2}$, iar $t_{n+1} - t_n = s_{n+1} - s_n + \frac{M}{2}$, deci concluzia este valabilă şi în acest caz.

....**1p**

Problema 3. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea: oricare ar fi $x \in A$, $x + x^2 + x^3 = x^4 + x^5 + x^6$.

a) Să se arate că dacă $n \geq 2$ este un număr natural, $x \in A$ şi $x^n = 0$, atunci $x = 0$.

b) Să se arate că $x^4 = x$, oricare ar fi $x \in A$.

Soluţie. a) Din ipoteză obţinem $x^{n-1} = x^n(x^4 + x^3 + x^2 - x - 1) = 0$ şi, analog, $x^{n-2} = x^{n-3} = \ldots = x = 0$.

....**2p**

b) Din ipoteză, $(x^3 - 1)(x^2 + x + 1) = 0$.

Rezultă $(x^4 - x)^2 = x^2(x-1)(x^3-1)(x^2+x+1) = 0$ deci, conform a), $x^4 - x = 0$.

....**5p**

Problema 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup care nu are elemente de ordin 4 şi $f : G \to G$ un morfism de grupuri care are proprietatea $f(x) \in \{x, x^{-1}\}$, oricare ar fi $x \in G$. Să se arate că $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in G$, sau $f(x) = x^{-1}$, oricare ar fi $x \in G$.

Soluţie. Să presupunem, prin absurd, că există $a, b \in G$ astfel încât $f(a) = a \neq a^{-1}$ şi $f(b) = b^{-1} \neq b$. Atunci $f(ab) = f(a)f(b) = ab^{-1} \neq ab$, deci $f(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Rezultă astfel $ab^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, $b^{-1} = ab^{-1}a$.

....**3p**

Apoi $f(ab^2) = f(a)f^2(b) = ab^{-2}$. Dacă $f(ab^2) = ab^2$, atunci $b^4 = e$, de unde $\mathrm{ord}(b) = 4$ – contradicţie cu ipoteza, sau $b^2 = e$ – contradicţie cu $b \neq b^{-1}$. Astfel $f(ab^2) = (ab^2)^{-1} = b^{-2}a^{-1}$, deci $ab^{-2} = b^{-2}a^{-1}$. Rezultă

$$ab^{-2}a = b^{-2} = (b^{-1})^2 = ab^{-1}aab^{-1}a,$$

de unde $a^2 = e$ – contradiţie, ca mai sus.

....**4p**