Etapa judeţeană — soluţii şi barem orientativ, clasa a XI-a

Problema 1. **(a)** Daţi un exemplu de două matrice A şi B din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Arătaţi că, dacă A şi B sunt două matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A^2+B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, atunci ele nu comută, $AB \neq BA$.

Soluţie. **(a)** De exemplu, matricele $A = \sqrt{3/2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ îndeplinesc condiţia din enunţ. .... **3 puncte**

(b) Dacă matricele A şi B ar comuta, atunci $A^2 + B^2 = (A + \mathrm{i}B)(A - \mathrm{i}B)$, deci

$$|\det(A + \mathrm{i}B)|^2 = \det(A + \mathrm{i}B)\det(A - \mathrm{i}B) = \det(A^2 + B^2) = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -5 < 0,$$

contradicţie. .... **4 puncte**

Problema 2. **(a)** Arătaţi că, dacă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie, astfel încât funcţiile $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(2x)$, şi $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + f(4x)$, sunt continue pe $\mathbb{R}$, atunci şi f este continuă pe $\mathbb{R}$.

(b) Daţi un exemplu de funcţie discontinuă $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care are următoarea proprietate: există un interval $I \subset \mathbb{R}$, astfel încât, oricare ar fi a în I, funcţia $g_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) = f(x) + f(ax)$, este continuă pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. **(a)** Continuitatea lui f rezultă din identitatea $f(x) = (g(x) - g(2x) + h(x))/2$, $x \in \mathbb{R}$, şi continuitatea funcţiilor g şi h. .... **2 puncte**

(b) Funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

este discontinuă în 0, dar $g_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) = f(x) + f(ax) = 0$, este continuă pe $\mathbb{R}$, oricare ar fi $a < 0$. .... **5 puncte**

Problema 3. **(a)** Fie A o matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A \neq aI_2$, oricare ar fi $a \in \mathbb{C}$. Arătaţi că o matrice X din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ comută cu matricea A, adică $AX = XA$, dacă şi numai dacă există două numere complexe α şi α', astfel încât $X = \alpha A + \alpha' I_2$.

(b) Fie A, B şi C trei matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, astfel încât $AB \neq BA$, $AC = CA$ şi $BC = CB$. Arătaţi că C comută cu orice matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Soluţie. **(a)** Este evident că dacă X are forma din enunţ, atunci X comută cu A. Reciproc, fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}$. Condiţia $AX = XA$ implică

$$a_2 x_1' = a_1' x_2, \tag{1}$$

$$(a_1 - a_2')x_2 + a_2(x_2' - x_1) = 0, \tag{2}$$

$$(a_1 - a_2')x_1' + a_1'(x_2' - x_1) = 0. \tag{3}$$

. . . . **2 puncte**

Întrucât A nu este de forma aI_2, $a \in \mathbb{C}$, sau cel puţin unul dintre elementele a_2, a_1' este nenul sau $a_2 = a_1' = 0$ şi $a_1 \neq a_2'$.

În primul caz, fie $a_2 \neq 0$ — dacă $a_1' \neq 0$, procedăm în mod analog. Exprimând pe x_1' din relaţia (1) şi pe x_2' din relaţia (2), rezultă

$$X = \frac{x_2}{a_2}A + \left(x_1 - \frac{a_1}{a_2}x_2\right) I_2.$$

. . . . **1 punct**

În fine, dacă $a_2 = a_1' = 0$ şi $a_1 \neq a_2'$, atunci relaţia (2) implică $x_2 = 0$, iar relaţia (3) implică $x_1' = 0$ şi rezultă

$$X = \frac{x_1 - x_2'}{a_1 - a_2'}A + \frac{a_1 x_2' - a_2' x_1}{a_1 - a_2'}I_2.$$

. . . . **1 punct**

(b) Vom arăta că C este de forma γI_2, unde γ este un număr complex, deci C comută cu orice matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să presupunem că C nu are această formă. Întrucât A şi C comută, conform **(a)**, există două numere complexe α şi α', astfel încât $A = \alpha C + \alpha' I_2$. În mod analog, există două numere complexe β şi β', astfel încât $B = \beta C + \beta' I_2$, deci $AB = BA$ — contradicţie. . . . . **3 puncte**

Problema 4. Fie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ o funcţie strict crescătoare. Arătaţi că:

(a) Există un şir descrescător de numere reale, strict pozitiv, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergent la 0, astfel încât $y_n \leq 2y_{f(n)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;

(b) Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir descrescător de numere reale, convergent la 0, atunci există un şir descrescător de numere reale, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergent la 0, astfel încât $x_n \leq y_n \leq 2y_{f(n)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. (a) Întrucât $f(0) > 0$ şi f este strict crescătoare, rezultă că $f(n) > n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Considerăm şirul strict crescător $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de numere naturale, definit prin $n_0 = 0$ şi $n_k = f(n_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}^*$ — monotonia acestui şir rezultă din proprietatea precedentă a lui f. Definim apoi şirul descrescător $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n = 2^{-k}$, $n_k \leq n < n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ — monotonia şi convergenţa la 0 ale acestui şir sunt evidente.

Pentru a demonstra inegalitatea $y_n \leq 2y_{f(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, este suficient să o demonstrăm pentru $n_k \leq n < n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Deoarece f este strict crescătoare, $n_{k+1} = f(n_k) \leq f(n) < f(n_{k+1}) = n_{k+2}$, deci $y_{f(n)} = 2^{-k-1} = y_n/2$. . . . . **2 puncte**

(b) În mod evident, $x_n \geq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deoarece $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi convergent la 0.

Reamintim şirul strict crescător $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de numere naturale, definit la punctul **(a)**: $n_0 = 0$ şi $n_k = f(n_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}^*$. Definim apoi şirul descrescător $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de numere reale pozitive, $z_0 = x_1$ şi $z_k = \max(x_{n_k}, z_{k-1}/2)$, $k \in \mathbb{N}^*$ — monotonia acestui şir rezultă inductiv, folosind monotonia şirurilor $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. În plus, $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent la 0: dacă există o infinitate de indici k, astfel încât $z_k = x_{n_k}$, atunci convergenţa la 0 a lui $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rezultă din monotonia sa şi convergenţa la 0 a lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; iar dacă există doar un număr finit de indici k, astfel încât $z_k = x_{n_k}$, atunci $z_k = z_{k-1}/2$ de la un rang încolo şi din nou $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge la 0.

În fine, definim şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n = z_k$, $n_k \leq n < n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Monotonia şi convergenţa la 0 ale acestui şir rezultă din proprietăţile corespunzătoare ale şirului $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Pentru a demonstra inegalităţile $x_n \leq y_n \leq 2y_{f(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, este suficient să le demonstrăm pentru $n_k \leq n < n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Evident, $x_n \leq x_{n_k} \leq z_k = y_n$. Pe de altă parte, $n_{k+1} = f(n_k) \leq f(n) < f(n_{k+1}) = n_{k+2}$, deoarece f este strict crescătoare, deci $y_{f(n)} = z_{k+1} \geq z_k/2 = y_n/2$.
.... **5 puncte**