

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 8 Martie 2014
CLASA a IX-a
Soluții și bareme orientative

Problema 1. Să se determine numărul irațional x știind că numerele $x^2 + x$ și $x^3 + 2x^2$ sunt numere întregi.

Soluție. Fie $x^2 + x = a$ și $x^3 + 2x^2 = b$. Atunci $b - ax = x^2 = a - x$, deci $x(a - 1) = b - a$ 4p

Cum x e irațional și a, b sunt întregi, deducem $a = b = 1$, 2p

deci $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 1p

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC și punctele $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ astfel încât

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{FA}{FB}.$$

Semidreptele (AD) , (BE) și (CF) intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M, N și P . Să se arate că triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate dacă și numai dacă triunghiurile BMC , CNA și APB au ariile egale.

Soluție. Se arată ușor că

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = 0. \quad (*)$$

..... 2p

Notând ariile triunghiurilor ABC , BMC , CNA și APB cu s , s_a , s_b , s_c , avem

$$\frac{DM}{AD} = \frac{s_a}{s},$$

deci

$$\frac{AM}{AD} = \frac{s + s_a}{s},$$

de unde

$$\overline{AM} = \frac{s + s_a}{s} \cdot \overline{AD},$$

și analoagele. 3p

Triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate dacă și numai dacă

$$\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = 0,$$

deci dacă și numai dacă

$$\frac{s + s_a}{s} \cdot \overline{AD} + \frac{s + s_b}{s} \cdot \overline{BE} + \frac{s + s_c}{s} \cdot \overline{CF} = 0,$$

relație echivalentă cu

$$s_a \cdot \overline{AD} + s_b \cdot \overline{BE} + s_c \cdot \overline{CF} = 0.$$

Folosind $(*)$, relația precedentă este echivalentă cu

$$(s_a - s_c) \cdot \overline{AD} + (s_b - s_c) \cdot \overline{BE} = 0,$$

și cum vectorii AD și BE sunt necoliniari, egalitatea are loc dacă și numai dacă $s_a = s_b = s_c$ 2p

Problema 3. Medianele AD , BE și CF ale triunghiului ABC se intersectează în punctul G . Fie P un punct în interiorul triunghiului, nesituat pe niciuna dintre medianele

acestui. Dreapta care trece prin P și este paralelă cu AD intersectează latura BC în punctul A_1 . În mod analog se definesc punctele B_1 și C_1 . Să se arate că

$$\overline{A_1D} + \overline{B_1E} + \overline{C_1F} = \frac{3}{2}\overline{PG}.$$

Soluție. Să ducem prin P paralele la laturile triunghiului. Dacă paralelele la AB și AC intersectează latura BC în punctele A_B și A_C , atunci triunghiurile ABC și PA_BA_C sunt evident asemenea, și cum PA_1 e paralelă cu mediana AD , rezultă că A_1 este mijlocul segmentului A_BA_C (a se vedea figura 1).

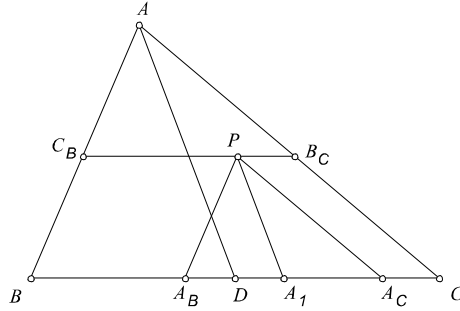


figura 1

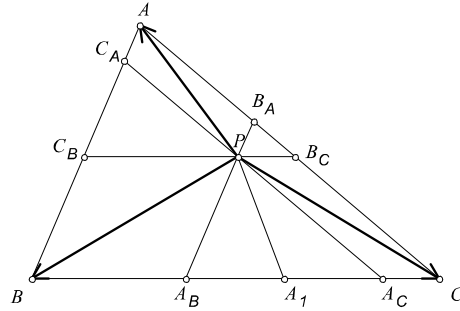


figura 2

Atunci

$$2\overline{A_1D} = \overline{A_1B} + \overline{A_1C} = \overline{A_BB} + \overline{A_CC} = \overline{PC_B} + \overline{PB_C}.$$

și egalitățile similare.....3p

Deducem că suma $2(\overline{A_1D} + \overline{B_1E} + \overline{C_1F})$ este egală cu

$$\overline{v} = \overline{PC_B} + \overline{PB_C} + \overline{PA_C} + \overline{PC_A} + \overline{PB_A} + \overline{PA_B}.$$

Dar

$$\overline{PC_A} + \overline{PB_A} = \overline{PA},$$

și analoagele, 3p
deci

$$\overline{v} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = 3\overline{PG},$$

de unde concluzia. 1p

Problema 4. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ care au proprietățile:

- a) $f(m+n) - 1$ divide $f(m) + f(n)$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- b) $n^2 - f(n)$ este pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. Se arată că $f(1) = 1, f(2) = 3$1p

Demonstrăm prin inducție că $f(n) = 2n - 1$1p

Presupunând că $f(k) = 2k - 1$, din a) deducem $f(k+1) \leq 2k + 1$3p

iar din b) deducem $f(k+1) \geq 2k + 1$ 2p