Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

CLASA a VIII-a

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 12\sqrt{3}$ cm şi $AA' = 18$ cm, se consideră punctele $P \in [AA']$ şi $N \in [A'B']$ astfel încât $A'N = 3B'N$.

Determinaţi lungimea segmentului $[AP]$ astfel încât, pentru orice punct $M \in [BC]$, triunghiul MNP să fie dreptunghic în N.

Gazeta Matematică

Soluţie. Deoarece $BC \perp (ABB')$, rezultă $BC \perp PN$ **1p**

Cum $PN \perp NM$, rezultă $PN \perp (NBC)$, de unde $PN \perp NB$, adică triunghiul NBP este dreptunghic în N **2p**

Notând $AP = x$, se obţine $BP^2 = x^2 + 432$, $PN^2 = (18 - x)^2 + 243$ şi $BN^2 = 351$. Întrucât $BP^2 = PN^2 + BN^2$, se obţine $x = 13,5$ cm **4p**

Problema 2. Pentru fiecare număr natural nenul n se notează cu $p(n)$ cel mai mare pătrat perfect cel mult egal cu n.

a) Determinaţi numărul perechilor de numere naturale nenule (m, n), cu $m \leq n$, pentru care

$$p(2m+1) \cdot p(2n+1) = 400.$$

b) Determinaţi mulţimea $\left\{ n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, n \leq 100 \text{ şi } \dfrac{p(n+1)}{p(n)} \notin \mathbb{N} \right\}$.

Soluţie. a) Sunt posibile trei cazuri:

Cazul 1: $p(2m-1) = 1$, $p(2n-1) = 400$; se obţine $1 \leq 2m - 1 < 4$ şi $400 \leq 2n - 1 < 441$, de unde $m \in \{1, 2\}$ şi $n \in \{200, 201, ..., 219\}$ **1p**

Cazul 2: $p(2m-1) = 4$, $p(2n-1) = 100$; rezultă $4 \leq 2m - 1 < 9$ şi $100 \leq 2n - 1 < 121$, de unde $m \in \{3, 4\}$ şi $n \in \{51, 52, ..., 60\}$ **1p**

Cazul 3: $p(2m-1) = 16$, $p(2n-1) = 25$; atunci $16 \leq 2m - 1 < 25$ şi $25 \leq 2n - 1 < 36$, de unde $m \in \{9, 10, 11, 12\}$ şi $n \in \{13, 14, ..., 18\}$ **1p**

În primul caz se formează 40 de perechi, în al doilea caz se formează 20 de perechi, iar în al treilea 24 de perechi; în total sunt 84 de perechi ca în enunţ **1p**

b) Fie $n \in \mathbb{N}$. Notând $p(n) = k^2$, rezultă $k^2 \leq n \leq (k+1)^2 - 1$, de unde $k^2 < n + 1 \leq (k+1)^2$. Ca urmare, $p(n+1) \in \{k, k+1\}$ **1p**

Atunci $\dfrac{p(n+1)}{p(n)} \notin \mathbb{N}$ dacă şi numai dacă $p(n) = k^2 \neq 1$ şi $p(n+1) = (k+1)^2$, adică $n = (k+1)^2 - 1$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Cum $n \leq 100$, rezultă $k \leq 9$.

Mulţimea cerută este $\{8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99\}$ **2p**

Problema 3. În vârful A al hexagonului regulat $ABCDEF$ de latură a se ridică perpendiculara $AS = 2a\sqrt{3}$ pe planul hexagonului. Punctele M, N, P, Q, respectiv R sunt proiecţiile punctului A pe dreptele SB, SC, SD, SE, respectiv SF.

a) Demonstraţi că punctele M, N, P, Q, R sunt coplanare.

b) Determinaţi măsura unghiului format de planele (MNP) şi (ABC).

Soluţie. a) Cu teorema celor trei perpendiculare, din $SA \perp (ABC)$ şi $AB \perp BD$, rezultă $SB \perp BD$. Întrucât $BD \perp AB$ şi $BD \perp SB$, obţinem $BD \perp (SAB)$, de unde $BD \perp AM$ **1p**

Deoarece $AM \perp SB$, rezultă $AM \perp (SBD)$, deci $AM \perp SD$. De aici, ţinând cont că $SD \perp AP$, rezultă $SD \perp (AMP)$ **1p**

Analog, se arată că $SD \perp (ARP)$, $SD \perp (ANP)$ şi $SD \perp (AQP)$. Din unicitatea planului perpendicular pe o dreaptă într-un punct, rezultă că punctele A, M, N, P, Q, R sunt coplanare **2p**

b) Folosind eventual faptul că $MR \parallel BF$, se arată că dreapta de intersecţie a planelor (MNP) şi (ABC) este paralela d dusă prin A la BF **1p**

Cum $d \perp SA$ şi $d \perp AD$, rezultă $d \perp (SAD)$, deci $d \perp AP$. Ca urmare, măsura unghiului format de planele (MNP) şi (ABC) este egală cu măsura unghiului PAD **1p**

Folosind teorema lui Pitagora, se obţine $SD = 4a$, de unde rezultă $m(\widehat{PDA}) = 60°$ şi $m(\widehat{PAD}) = 30°$ **1p**

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi mulţimea valorilor pe care le poate lua suma

$$S = [x_2 - x_1] + [x_3 - x_2] + ... + [x_n - x_{n-1}],$$

unde x_1, x_2, ..., x_n sunt numere reale cu partea întreagă 1, 2, ..., n.

Soluţie. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $[a] \leq a < [a] + 1$, de unde $-[a] - 1 < -a \leq -[a]$. Adunând cu $[b] \leq b < [b] + 1$, rezultă

$$[b] - [a] - 1 < b - a < [b] - [a] + 1,$$

de unde se obţine $[b] - [a] - 1 \leq [b - a] \leq [b] - [a]$ **2p**

Atunci $[x_k] - [x_{k-1}] - 1 \leq [x_k - x_{k-1}] \leq [x_k] - [x_{k-1}]$, de unde $0 \leq [x_k - x_{k-1}] \leq 1$, pentru orice $k = 2, 3, ..., n$. Ca urmare, $0 \leq S \leq n - 1$. **2p**

Vom arăta că mulţimea valorilor pe care le poate lua S este $\{0, 1, 2, ..., n - 1\}$.

Valoarea maximă $S = n - 1$ se obţine, de exemplu, pentru $x_k = k$, $k = 1, 2, ..., n$ **1p**

Suma $S = p$, unde $0 \leq p \leq n - 2$, se obţine, de exemplu, pentru:

$$x_k = \begin{cases} k + \dfrac{1}{k+1}, & \text{dacă } 1 \leq k \leq n - 1 - p \\ k, & \text{dacă } n - p \leq k \leq n \end{cases}$$ **2p**