Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Problema 1. Determinaţi numerele de forma $\overline{abc}$ care verifică relaţia

$$b \cdot \overline{ac} = c \cdot \overline{ab} + 10.$$

Gazeta Matematică

Soluţie. Relaţia din ipoteză revine la $b(10a + c) = c(10a + b) + 10 \Leftrightarrow ab = ac + 1$. ... **3 p**
Obţinem că $a(b - c) = 1$, de unde $a = b - c = 1$ .... **2 p**
Numerele căutate sunt 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198 .... **2 p**

Problema 2. Fie M mulţimea numerelor palindrom de forma $5n + 4$, unde $n \in \mathbb{N}$. (Un număr natural se numeşte *palindrom* dacă este egal cu răsturnatul său. De exemplu, numerele 7, 191, 23532, 3770773 sunt numere palindrom.)

a) Dacă scriem în ordine crescătoare elementele mulţimii M, stabiliţi care este al 50-lea număr scris.

b) Determinaţi cel mai mic şi cel mai mare dintre elementele mulţimii M care se scriu cu cifre nenule şi au suma cifrelor 2014.

Soluţie.

a) Numerele din mulţimea M au ultima cifră 4 sau 9. În mulţimea M există două numere de o cifră (4 şi 9), două numere de două cifre (44 şi 99), 20 de numere de trei cifre (404, 414,..., 494, 909, 919, ..., 999) şi 20 de numere de patru cifre (4004, 4114, ..., 4994, 9009, 9119, ..., 9999) .... **2 p**

Al 50-lea număr din M este al şaselea număr de cinci cifre, anume 40504 .... **1 p**

b) Pentru a obţine numere mici, ar trebui ca acestea să aibă cât mai puţine cifre, prin urmare vom lua cât mai multe cifre de 9. Cel mai mic număr din M cu suma cifrelor 2014 este $98\underbrace{99\ldots9}_{220 \text{ de } 9}89$ .... **2 p**

Pentru a obţine numere mari, ar trebui ca acestea să aibă cât mai multe cifre. Prin urmare, vom lua numărul maxim de cifre de 1, scriind cifra 4 pe prima şi ultima poziţie. Numărul cerut este $4\underbrace{11\ldots1}_{2006 \text{ de } 1}4$ .... **2 p**

Problema 3. Se consideră mulţimea $A = \{1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{2014}\}$. Spunem că se realizează o *partiţie* a lui A dacă mulţimea A este scrisă ca o reuniune de submulţimi nevide ale sale, disjuncte două câte două.

a) Demonstraţi că nu există o partiţie a lui A astfel încât produsul elementelor fiecărei submulţimi din partiţie să fie pătrat perfect.

b) Arătaţi că există o partiţie a lui A astfel încât suma elementelor fiecărei submulţimi din partiţie să fie pătrat perfect.

Soluţie

a) Presupunem că există o astfel de partiţie. Cum produsul elementelor fiecărei submulţimi din partiţie este pătrat perfect, deducem că produsul tuturor elementelor din mulţimea A este pătrat perfect.

   Însă produsul elementelor lui A este $3^{1+2+3+\cdots+2014} = 3^{2015\cdot 1007}$ şi acest număr nu este pătrat perfect, deoarece exponentul lui 3 este impar. ....**3 p**

b) Observăm că $3^{2n} + 3^{2n+1} = (3^n \cdot 2)^2$. ....**2 p**

   O posibilă partiţie este $A = \{1, 3\} \cup \{3^2, 3^3\} \cup \cdots \cup \{3^{2012}, 3^{2013}\} \cup \{3^{2014}\}$ .... **2 p**

Problema 4. Un număr natural de 10 cifre se numeşte *dichisit* dacă cifrele sale aparţin mulţimii $\{1, 2, 3\}$ şi oricare două cifre consecutive diferă prin 1.

a) Arătaţi că un număr dichisit conţine în scrierea sa exact cinci cifre de 2.

b) Stabiliţi câte numere dichisite există.

c) Demonstraţi că suma tuturor numerelor dichisite se divide cu 1408.

Soluţie.

a) În scrierea unui număr dichisit, cifrele pare alternează cu cele impare. Cum numerele au 10 cifre, ele vor conţine exact cinci cifre pare, deci exact cinci de 2. .... **1 p**

b) Există $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ numere dichisite de forma $\overline{2a2b2c2d2e}$ şi $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ numere de forma $\overline{a2b2c2d2e2}$. În total, există 64 de numere dichisite. .... **2 p**

c) Dacă numărul $\overline{a_1a_2\ldots a_{10}}$ este dichisit, atunci şi numărul $\overline{(4-a_1)(4-a_2)\ldots(4-a_{10})}$ este dichisit şi distinct de primul. Suma acestor două numere este 4444444444. .... **2 p**

   Grupăm numerele dichisite în 32 astfel de perechi. Prin urmare, suma tuturor numerelor este $32 \cdot 4444444444 = 2^7 \cdot 11 \cdot 101010101 = 1408 \cdot 101010101$........................**2 p**