Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016
CLASA a V-a - Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Determinaţi numerele de trei cifre pentru care, suprimând cifra zecilor, obţinem un număr de 13 ori mai mic.

Gazeta Matematică

Soluţie
Fie $\overline{abc}$ un număr cu proprietatea din enunţ.
Condiţia dată revine la $\overline{abc} = 13 \cdot \overline{ac}$, adică la $100a + 10b + c = 130a + 13c$, deci la $10b = 30a + 12c$. **1p**
Observând că 5 divide atât $10b$ cât şi $30a$ (sau examinând ultima cifră a acestor numere), se deduce că $12c$ este divizibil cu 5, deci $c \in \{0, 5\}$. ... **2p**
Dacă $c = 0$, se ajunge la $b = 3a$. Cum a este cifră nenulă, convin variantele: $a = 1$, $b = 3$; $a = 2$, $b = 6$ şi $a = 3$, $b = 9$, care conduc la numerele 130, 260, respectiv 390. .... **2p**
Dacă $c = 5$, se ajunge la $b = 3a + 6$. Cum a este cifră nenulă, convine numai varianta $a = 1$, $b = 9$, care conduce la numărul 195. .... **2p**
În concluzie, există patru numere cu proprietatea dorită: 130, 260, 390 şi 195.

Problema 2. Determinaţi perechile (X, Y) de mulţimi care au ca elemente numere naturale nenule şi care verifică simultan următoarele proprietăţi:
(1) fiecare din mulţimile X şi Y are trei elemente;
(2) $3 \in X$ şi $5 \in Y$;
(3) mulţimea $X \cap Y$ are exact un element;
(4) dacă a şi b sunt elemente diferite ale mulţimii X, atunci $(a + b) \in Y$.

Soluţie
Dacă $X = \{a, b, c\}$, cu $a < b < c$, atunci $a + b$, $b + c$ şi $c + a$ sunt elemente diferite ale lui Y. Dacă, de exemplu, $a + b = b + c$, atunci $a = c$, ceea ce nu se poate.
Prin urmare $Y = \{a + b,\ b + c,\ c + a\}$. **1p**
Deoarece $a < b < c \leq a + b < a + c < b + c$, elementul comun al mulţimilor X şi Y nu poate fi decât $c = a + b$. **2p**
Dacă $c = 3$, rezultă că $a = 1$, $b = 2$, deci $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$ care satisfac condţiile din enunţ ($5 \in Y$ şi $X \cap Y = \{5\}$). **1p**
Dacă $b = 3$, atunci $a \in \{1, 2\}$. Dacă $a = 1$, atunci $c = a + b = 4$, deci $X = \{1, 3, 4\}$, $Y = \{4, 5, 7\}$. Dacă $a = 2$, atunci $c = 5$, deci $X = \{2, 3, 5\}$, $Y = \{5, 7, 8\}$. Ambele perechi de mulţimi satisfac condiţiile din enunţ. .. **2p**

Dacă $a = 3$, atunci $b > 3$ şi $c > 3$, prin urmare toate elementele lui Y sunt mai mari decât 5, deci nu avem soluţii în acest caz. **1p**

Problema 3. Dacă A şi B sunt numere naturale nenule, atunci notăm cu $\overline{AB}$ numărul obţinut prin scrierea, în ordine, a cifrelor lui B în continuarea cifrelor lui A. De exemplu, dacă $A = 193$ şi $B = 2016$, atunci $\overline{AB} = 1932016$. Arătaţi că există o infinitate de pătrate perfecte de forma $\overline{AB}$ în fiecare din situaţiile:

a) numerele A şi B sunt pătrate perfecte;
b) numerele A şi B sunt cuburi perfecte;
c) numărul A este cub perfect, iar numărul B este pătrat perfect;
d) numărul A este pătrat perfect, iar numărul B cub perfect.

Soluţie
De exemplu:
a) Pentru $A = 4$ şi $B = 9$ se obţine $\overline{AB} = 49 = 7^2$. **1p**
Completând cu un număr par de 0-uri obţinem, pornind de la exemplul de mai sus, o infinitate de soluţii: pentru $A = 4$ şi $B = 9 \cdot 10^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, se obţine $\overline{AB} = \Big(7\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ cifre}}\Big)^2$. **1p**

b) Pentru $A = 8$ şi $B = 1$ se obţine $\overline{AB} = 81 = 9^2$. **1p**
Adăugându-i lui B $6n$ 0-uri la coadă, pentru $A = 8$ şi $B = 10^{6n}$, $n \in \mathbb{N}$, se obţine $\overline{AB} = \Big(9\underbrace{00\ldots0}_{3n \text{ cifre}}\Big)^2$. **1p**

c) Pentru $A = 8$ şi $B = 10^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, se obţine $\overline{AB} = \Big(9\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ cifre}}\Big)^2$. **1p**

d) Pentru $A = 36$ şi $B = 1$ se obţine $\overline{AB} = 361 = 19^2$. **1p**
Pentru $A = 36$ şi $B = 10^{6n}$, $n \in \mathbb{N}$, se obţine $\overline{AB} = \Big(19\underbrace{00\ldots0}_{3n \text{ cifre}}\Big)^2$. **1p**

Orice alte exemple corecte conduc şi ele la acordarea punctajului prevăzut. De exemplu $A = 64$ şi $B = 10^{6n}$ cu $n \geq 1$ verifică toate cazurile.

Problema 4. Pe o masă sunt aşezate 31 de cartonaşe pe care sunt scrise numerele $1, 2, 3, \ldots, 31$. Alex şi Bogdan îşi aleg câte 15 cartonaşe şi observă că suma numerelor de pe cartonaşele lui Alex este triplul sumei numerelor de pe cartonaşele lui Bogdan. Aflaţi numărul scris pe cartonaşul rămas pe masă.

Soluţie
B este cel puţin $1 + 2 + 3 + \cdots + 15 = 120$ deci A este cel puţin $3 \cdot 120 = 360$.
2 puncte

Dar A este cel mult $17 + 18 + \cdots + 31 = 360$ deci A este 360 şi B este 120. . . . . 2 puncte

Deci A alege $17, 18, \ldots, 31$ şi B alege $1, 2, \ldots, 15$, aşadar $n = 163$ puncte