Societatea de Științe Matematice din România

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

# Olimpiada Națională de Matematică
# Etapa Județeană și a Municipiului București, 18 martie 2017

## CLASA a XI-a

**Problema 1.**
Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale astfel încât $a_1 > 2$ şi

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

a) Arătați că $a_{2n-1} + a_{2n} > 4$, oricare ar fi $n \geq 1$, şi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.
b) Determinați cel mai mare număr real $a$ pentru care inegalitatea

$$\sqrt{x^2 + a_1^2} + \sqrt{x^2 + a_2^2} + \sqrt{x^2 + a_3^2} + \ldots + \sqrt{x^2 + a_n^2} > n\sqrt{x^2 + a^2}$$

este adevărată oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.**
a) Arătați că există funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

$$f \circ g = g \circ f,\ f \circ f = g \circ g \ \text{ şi } \ f(x) \neq g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Arătați că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue cu proprietățile $f \circ g = g \circ f$ şi $f(x) \neq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$, atunci

$$(f \circ f)(x) \neq (g \circ g)(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

**Problema 3.**
Se consideră două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ ce nu comută.
a) Ştiind că $A^3 = B^3$, arătați că $A^n$ şi $B^n$ au aceeaşi urmă, pentru orice număr natural nenul $n$.
b) Dați exemplu de două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ ce nu comută, astfel ca pentru orice număr natural nenul $n$, $A^n$ şi $B^n$ să fie diferite dar să aibă aceeaşi urmă.

**Problema 4.**
Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ cu $\det A = 0$ şi $A^*$ adjuncta sa. Arătați că $\left(A^*\right)^2 = (\mathrm{tr}A^*)A^*$, unde $\mathrm{tr}A^*$ este urma matricei $A^*$.
(Se poate folosi faptul că $\mathrm{rang}(XY) \geq \mathrm{rang}(X) + \mathrm{rang}(Y) - n, \forall X, Y \in M_n(\mathbb{C})$.)

*Timp de lucru 4 ore.*
*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*