Societatea de Științe Matematice din România

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 18 martie 2017

CLASA a VII-a

Problema 1. Se consideră numărul natural $n \geq 3$ cu proprietatea că $3n+1$ este pătrat perfect. Arătați că există trei numere naturale nenule a, b, c astfel încât numărul

$$x = \sqrt{1 + \frac{3n+3}{a^2+b^2+c^2}}$$

să fie natural.

Problema 2. Fie $E(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{x+1}{y+1} + \frac{x+2}{y+2}$.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $E(x,y) = 3$.

b) Arătați că există o infinitate de numere naturale n pentru care ecuația $E(x,y) = n$ are soluții în mulțimea numerelor naturale nenule.

Gazeta Matematică

Problema 3. Pe latura $[CD]$ a pătratului $ABCD$ se consideră punctul E astfel încât $m(\sphericalangle ABE) = 60°$, iar pe semidreapta $(BA$ se ia punctul F astfel încât $[BE] \equiv [BF]$. Se notează cu M punctul de intersecție al dreptelor EF și AD.

a) Arătați că $m(\sphericalangle BME) = 75°$.

b) Bisectoarea unghiului CBE intersectează dreapta CD în punctul N. Arătați că triunghiul BMN este echilateral.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle A) < m(\sphericalangle C)$. Punctul E aparține bisectoarei interioare a unghiului B astfel încât $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle ACB$. Fie D un punct pe dreapta BC astfel încât $B \in (CD)$ și $[BD] \equiv [AB]$. Arătați că mijlocul M al segmentului $[AC]$ este situat pe dreapta DE.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.