MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
romania2019.eu
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 16 martie 2019

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive, cu proprietatea că şirul $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, cu limita nenulă. Calculaţi limita

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătaţi că există un număr complex z, cu $|z| = 1$, având proprietatea că

$$\operatorname{Re}(\det(A + zB)) \geq \det(A) + \det(B),$$

unde $\operatorname{Re}(w)$ reprezintă partea reală a numărului complex w.

Problema 3. Fie n un număr natural impar şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $(A - B)^2 = O_n$. Arătaţi că $\det(AB - BA) = 0$.

Problema 4. Fie $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ o funcţie continuă, cu $f(0) > 0$, având proprietatea că pentru orice $0 \leq x < y$ au loc inegalităţile $x - y < f(y) - f(x) \leq 0$. Arătaţi că:
a) Există un unic număr $\alpha \in (0,\infty)$ cu proprietatea că $(f \circ f)(\alpha) = \alpha$.
b) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_1 \geq 0$ şi $x_{n+1} = f(x_n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, este convergent.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.