MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
romania2019.eu
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 16 martie 2019

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinați numerele întregi a, b, c pentru care

$$\frac{a+1}{3} = \frac{b+2}{4} = \frac{5}{c+3}.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Se consideră D mijlocul bazei $[BC]$ a triunghiului isoscel ABC în care $m(\angle BAC) < 90°$. Pe perpendiculara în B pe dreapta BC se consideră punctul E astfel încât $\angle EAB \equiv \angle BAC$, iar pe paralela prin C la dreapta AB se consideră punctul F astfel încât F și D sunt de o parte și de alta față de dreapta AC și $\angle FAC \equiv \angle CAD$. Demonstrați că $AE = CF$ și $BF = EF$.

Problema 3. Se consideră mulțimile $M = \{0, 1, 2, \ldots, 2019\}$ și

$$A = \left\{ x \in M \,\middle|\, \frac{x^3 - x}{24} \in \mathbb{N} \right\}.$$

a) Câte elemente are mulțimea A?
b) Determinați cel mai mic număr natural n, $n \geq 2$, care are proprietatea că orice submulțime cu n elemente a mulțimii A conține două elemente distincte a căror diferență se divide cu 40.

Problema 4. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC, $m(\widehat{A}) = 90°$, și punctul $D \in (AB)$ astfel încât $AD = \frac{1}{3}AB$. În semiplanul determinat de dreapta AB și punctul C se consideră punctul E pentru care $m(\angle BDE) = 60°$ și $m(\angle DBE) = 75°$. Dreptele BC și DE se intersectează în punctul G, iar paralela prin punctul G la dreapta AC intersectează dreapta BE în punctul H.
Demonstrați că triunghiul CEH este echilateral.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.