

CLASA a VI-a, SOLUȚII ȘI BAREM DE CORECTARE

Problema 1. Pe o tablă sunt desenate punctele coliniare A , O și C , în această ordine. Anghel și Costel trasează, pe rând, semidreptele $[OA_1]$ și $[OC_1]$, în sensul deplasării acelor de ceasornic, astfel încât $m(\angle AOA_1) = 3^\circ$ și $m(\angle COC_1) = 7^\circ$. La pasul următor, păstrând sensul, Anghel trasează semidreapta $[OA_2]$ astfel încât $m(\angle A_1OA_2) = 3^\circ$ și Costel trasează semidreapta $[OC_2]$ astfel încât $m(\angle C_1OC_2) = 7^\circ$. Construcția continuă după aceeași regulă (unghi de 3° , urmat de unghi de 7°) până la pasul final, fie acesta n , când semidreapta $[OC_n]$ coincide cu semidreapta $[OA_n]$.

a) Determinați n .

b) De câte ori, pe parcursul construcției, o semidreaptă trasată de Costel s-a suprapus peste o semidreaptă trasată anterior de Anghel?

Soluție. a) Costel are de recuperat 180° **1 punct**

După fiecare pas el recuperează $7^\circ - 3^\circ = 4^\circ$ **1 punct**

Sunt necesari $180 : 4 = 45$ pași. **2 puncte**

b) Dacă două semidrepte trasate de Anghel și Costel coincid, atunci Anghel a trasat x semidrepte iar Costel y semidrepte și avem egalitatea $7y = 3x + 180$ **1 punct**

Deducem că y se divide cu 3 și $y \in \{26, 27, \dots, 45\}$. Obținem

$$(x, y) \in \{(3, 27); (10, 30); (17, 33); (24, 36); (31, 39); (38, 42); (45, 45)\},$$

adică 7 coincidențe **2 puncte**

Problema 2. Vom numi *superprim* un număr natural prim, mai mare decât 10, care îndeplinește simultan următoarele condiții:

i) este format din cifre distincte;

ii) oricum am schimba ordinea cifrelor sale, obținem tot un număr prim.

Determinați toate numerele superprime.

Soluție. Numerele superprime sunt formate doar din cifrele 1, 3, 7, 9, deoarece, în caz contrar, prin schimbarea ordinii cifrelor se poate obține un număr par sau un număr divizibil cu 5. Prin urmare, un număr superprim poate avea cel mult 4 cifre. **2 puncte**

Cum 1397 se divide cu 11, nu există numere superprime formate cu 4 cifre. **2 puncte**

Cum $7 \mid 371$, $11 \mid 319$, $7 \mid 791$, $13 \mid 793$, nu există numere superprime cu 3 cifre. **2 puncte**

Numerele superprime de două cifre sunt 13, 31, 17, 71, 37, 73, 79, 97. **1 punct**

Problema 3. Fie ABC un triunghi echilateral. În semiplanul determinat de BC care nu-l conține pe A considerăm un punct D astfel încât $m(\angle BDC) = 90^\circ$. Dacă M este mijlocul segmentului AB , determinați $m(\angle BDM)$.

Soluție. Considerăm punctul N , mijlocul segmentului $[BC]$ **1 punct**

Cum DN este mediană în triunghiul BCD , rezultă că triunghiul DNC este isoscel. **1 punct**

Fie $m(\angle BCD) = \alpha$. Unghiul $\angle BND$ este exterior $\triangle DNC$, deci $m(\angle BND) = 2\alpha$ **1 punct**

Deoarece triunghiul BMN este echilateral rezultă că $MN = BN$. Cum $DN = BN$ rezultă că triunghiul MND este isoscel **2 puncte**

Reiese $m(\angle DMN) = 60^\circ - \alpha$ și $m(\angle BMD) = \alpha$ și, din $\triangle MBD$, $m(\angle BDM) = 30^\circ$ **2 puncte**

Problema 4. Vom numi un număr natural n *interesant* dacă $n \geq 2$ și orice număr $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$, se scrie ca o sumă de divizori distincți ai lui n .

Arătați că produsul a două numere interesante este un număr interesant.

(Se acceptă că o sumă poate avea un singur termen.)

Soluție. Dacă m, n sunt interesante și $an < x < an + n$, atunci $x = an + c_1 + c_2 + \dots + c_k$, unde $c_1, c_2, \dots, c_k$ sunt divizori distincți ai lui n **2 puncte**

Pe de altă parte, dacă $1 \leq x < mn$, atunci, din teorema împărțirii cu rest, $x = an + b$, cu $0 \leq b < n, 0 \leq a < m$ **2 puncte**

Cum m este interesant, putem scrie, pentru $a \geq 1$, $a = d_1 + \dots + d_\ell$, cu $d_1, \dots, d_\ell$ divizori distincți ai lui m **2 puncte**

Prin urmare $x = nd_1 + nd_2 + \dots + nd_\ell + c_1 + c_2 + \dots + c_k$ (folosind doar divizori de tip c_i pentru $a = 0$, respectiv d_j pentru $b = 0$). Cum pentru fiecare d_j și c_i avem $c_i < n \leq nd_j$ rezultă că toți divizorii $nd_1, nd_2, \dots, nd_\ell, c_1, c_2, \dots, c_k$ ai numărului mn sunt distincți **1 punct**