Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Călăraşi, 29 mai 2010

CLASA a VI-a
Barem de evaluare

Problema 1. Se consideră mulţimea

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q}_+ \mid x = \frac{a}{b}, \text{unde } a, b \in \{1,2,3,4,5,6\} \right\}$$

.

a) Determinaţi numărul de elemente ale mulţimii A.

b) Demonstraţi că nu există două mulţimi disjuncte, X şi Y, astfel încât $X \cup Y = A$ şi suma elementelor din X să fie egală cu suma elementelor din Y.

Soluţie.

a) $A = \left\{1,2,3,4,5,6,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5}\right\}$
Deci $\text{card}A = 23$ .... **2 puncte**

b) Suma elementelor din A este $35\frac{19}{20}$ .... **1 punct**
Suma elementelor lui X (respectiv Y) trebuie să fie egală cu $17\frac{39}{40}$
.... **1 punct**
Fracţia $\frac{39}{40}$ este ireductibilă .... **1 punct**
Cum cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracţiilor din mulţimea X (respectiv Y) nu se divide cu 8, rezultă concluzia. ...... **2 puncte**

Problema 2. Determinaţi pătratele perfecte nenule care se pot scrie sub forma $\overline{abcd} - \overline{dcba}$, unde a, b, c şi d sunt cifre nenule şi $b < c$.

Soluţie. Avem $\overline{abcd} - \overline{dcba} = n^2$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
$n^2 = 9 \cdot [111 \cdot (a-d) + 10 \cdot (b-c)]$ . ... **2 puncte**

Prin urmare numărul $m = 111 \cdot (a-d) + 10 \cdot (b-c)$ trebuie să fie pătrat perfect. Ultima cifră a lui m este $a-d$. .... **2 puncte**

Ultima cifră a unui pătrat perfect este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9 şi cum $a-d \notin \{0,9\}$, rezultă că $a-d \in \{1,4,5,6\}$.

Dacă $a-d=1$ obţinem $b-c=-3$ şi deci $n^2 = 27^2$, iar dacă $a-d \in \{4,5,6\}$ nu obţinem soluţii cu $b-c<0$. .... **3 puncte**

Problema 3. În triunghiul ABC punctul M este mijlocul laturii $[BC]$ şi $m(\sphericalangle ACB) = 15°$. Ştiind că $m(\sphericalangle AMB) = 45°$, determinaţi măsura unghiului BAC.

Soluţie. Considerăm punctul P, simetricul punctului C faţă de dreapta AM. Rezultă că triunghiul APC este echilateral. .... **1 punct**

Cum $(AM$ este bisectoarea unghiului PAC, rezultă că dreapta AM este mediatoarea segmentului $[PC]$ şi deci $MP = MC$. Prin urmare triunghiurile AMP şi AMC sunt congruente, deci $\sphericalangle AMP \equiv \sphericalangle AMC$, ceea ce implică $m(\sphericalangle PMC) = 90°$. .... **2 puncte**

Rezultă că triunghiul PBC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza $[BC]$. .... **2 puncte**

De aici rezultă că triunghiul PAB este isoscel ($PA = PB$), deci $m(\sphericalangle APB) = 30°$, de unde $m(\sphericalangle BAP) = 75°$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 135°$. .... **2 puncte**

Problema 4. În două ţări vecine, $Narnia$ şi $Urania$, unităţile monetare sunt reprezentate de monede numite *taleri*, respectiv *arginţi*. În $Narnia$ un *argint* se schimbă cu 4 *taleri* şi în $Urania$ un *taler* se schimbă cu 9 *arginţi*. $Miraz$ trece dintr-o ţară în alta şi schimbă monede. Iniţial $Miraz$ se află în $Narnia$ şi are un singur *taler* şi niciun *argint*.

a) Verificaţi dacă la un moment dat $Miraz$ poate avea în total 21 de monede.

b) Demonstraţi că în niciun moment $Miraz$ nu poate avea numărul de *taleri* egal cu numărul de *arginţi*.

Soluţie.

a) 21 de monede se obţin din 5 *arginţi* şi din 16 *taleri*. .... **1 punct**

   Justificare .... **1 punct**

b) La un moment dat Miraz are x *arginţi* şi y *taleri*. Dacă se află în Narnia şi schimbă un *argint*, atunci va avea $x-1$ *arginţi* şi $y+4$ *taleri*. Dacă se află în Urania şi schimbă un *taler*, atunci va avea $y-1$ *taleri* şi $x+9$ *arginţi*. .... **1 punct**

Diferenţa dintre numărul de *arginţi* şi numărul de *taleri* este $|x-y-5|$ sau $|x-y-10|$, ceea ce arată că împărţind diferenţa $|x-y|$ la 5 obţinem mereu acelaşi rest. .... **2 puncte**

Cum în momentul iniţial Miraz a avut un *taler*, rezultă că acest rest este egal cu 1 sau cu 4, deci egalitatea $x = y$ nu este posibilă.

.... **2 puncte**