

Problema 1.6 Un număr natural se numește *superb* dacă este multiplul numărului divizorilor săi (spre exemplu 12 este superb deoarece are 6 divizori și 12 este multiplu al lui 6).

- Determinați cel mai mare număr superb de două cifre.
- Demonstrați că nu există numere superbe care să aibă ultima cifră 3.

Soluție a) $99 = 3^2 \cdot 11$. 99 are 6 divizori și $6 \nmid 99$.

$98 = 2 \cdot 7^2$. 98 are 6 divizori și $6 \nmid 98$.

$97 = 97$. 97 are 2 divizori și $2 \nmid 97$.

$96 = 2^5 \cdot 3$. 96 are 12 divizori și $12 \mid 96$.

Cel mai mare număr superb de două cifre este 96.2p

b) Fie X un număr natural cu $u(X) = 3$ ($u(X)$ - ultima cifră a lui X).

Dacă $u(X) = 3$, atunci X este impar.2p

Pe de altă parte $u(X) = 3$ implică X nu este pătrat perfect, iar un număr care nu este pătrat perfect are un număr par de divizori.2p

Cum un număr impar nu poate fi multiplul unui număr par deducem că X nu este superb. ...1p

Problema 2.6 Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care $\frac{a+1}{b}$ și $\frac{b+2}{a}$ sunt simultan numere naturale.

Soluție $\frac{a+1}{b}$ număr natural nenul implică $b \mid a+1$, de unde $b \leq a+1$ și de aici $b+2 \leq a+3$.

Acum $\frac{b+2}{a} \leq \frac{a+3}{a} = 1 + \frac{3}{a} \leq 4$. Cum $\frac{b+2}{a}$ este număr natural nenul rezultă $\frac{b+2}{a} \in \{1, 2, 3, 4\}$.
3p

Dacă $\frac{b+2}{a} = 1$, atunci din $b+2 = a$ rezultă $b = a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ număr natural nenul implică $\frac{a+1}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2}$ număr natural nenul, de unde $a \in \{3, 5\}$. Obținem soluțiile $a = 3, b = 1$ și $a = 5, b = 3$.

Dacă $\frac{b+2}{a} = 2$, atunci din $b+2 = 2a$ rezultă $b = 2a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\frac{2a+2}{2a-2} = 1 + \frac{4}{2a-2}$ este număr natural par, de unde $a \in \{2, 3\}$. Obținem soluția $a = 3, b = 4$; varianta $a = 2, b = 2$ nu verifică condițiile inițiale.

Dacă $\frac{b+2}{a} = 3$, atunci din $b+2 = 3a$ rezultă $b = 3a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\frac{3a+3}{3a-2} = 1 + \frac{5}{3a-2}$ este număr natural, de unde $a \in \{1\}$. Obținem soluția $a = 1, b = 1$.

Dacă $\frac{b+2}{a} = 4$, atunci $b+2 = 4a$ rezultă $b = 4a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\frac{4a+4}{4a-2} = 1 + \frac{6}{4a-2}$ este număr natural par, de unde $a \in \{1, 2\}$. Obținem soluția $a = 1, b = 2$; varianta $a = 2, b = 6$ nu verifică condițiile inițiale.4p

Problema 3.6. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A . Bisectoarea unghiului ACB intersectează latura AB în punctul D și perpendiculara în B pe BC în punctul E . Notăm cu F simetricul lui E față de B și cu P intersecția dreptelor DF și BC . Demonstrați că $EP \perp CF$.

