Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa naţională, Hunedoara, 23 aprilie 2019

CLASA a VI-a – soluţii

Problema 1. Se consideră un număr raţional r şi numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_6$, $b_1, b_2, \ldots, b_6$ astfel încât $1 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_6 \leq 11$ şi

$$r = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \frac{a_5}{b_5} = \frac{a_6}{b_6}.$$

Arătaţi că r este număr întreg.

Soluţie. Dacă $b_1 = 1$, atunci $r = a_1 \in \mathbb{N}$ **2p**

În caz contrar, printre cele 6 numere naturale distincte $b_1, b_2, \ldots, b_6$, făcând parte din mulţimea $\{2, 3, 4, \ldots, 11\}$, există două consecutive **2p**

În acest caz, din $b_{i+1} = 1 + b_i$ rezultă $r = \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{a_{i+1}-a_i}{b_{i+1}-b_i} \in \mathbb{N}$ **3p**

Problema 2. Determinaţi toate perechile (a, b) de numere naturale pentru care fracţiile

$$\frac{3a+8b+2}{10a+2b+1} \quad \text{şi} \quad \frac{8a+b+3}{2a+7b+3}$$

reprezintă, simultan, numere naturale.

Soluţie. Pentru ca ambele fracţii să fie, simultan, numere naturale este necesar ca $3a+8b+2 \geq 10a+2b+1$ şi $8a+b+3 \geq 2a+7b+3$, de unde, prin adunare, $11a+9b+5 \geq 12a+9b+4$, ceea ce implică $a \in \{0, 1\}$ **2p**

Pentru $a = 0$ a doua fracţie este $\frac{b+3}{7b+3}$; pentru ca ea să fie număr natural trebuie ca $b \geq 7b$, deci $b = 0$, caz în care şi prima fracţie este număr natural **2p**

Pentru $a = 1$ a doua fracţie este $\frac{b+11}{7b+5}$; pentru ca ea să fie număr natural trebuie ca $b + 11 \geq 7b + 5$, deci $b \in \{0, 1\}$ şi convine doar $b = 1$, caz în care şi prima fracţie este număr natural **2p**

Aşadar, perechile cerute sunt $a = 0, b = 0$ şi $a = 1, b = 1$ **1p**

Problema 3. Determinaţi cel mai mare număr natural n pentru care este îndeplinită condiţia

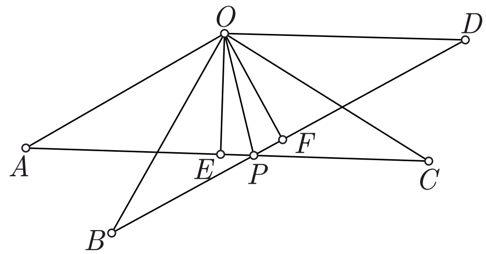
> *există n semidrepte distincte două câte două, cu aceeaşi origine, astfel încât măsura oricărui unghi format de aceste semidrepte este un număr natural care nu este prim.*

Soluţie. Dacă luăm 90 de unghiuri de $4°$, formate în jurul unui unui punct, obţinem 90 de semidrepte care fac între ele unghiuri cu măsuri întregi, multiplu de 4 .... **2p**

Să arătăm că, dacă luăm 91 sau mai multe semidrepte, condiţia nu este îndeplinită. Notăm unghiurile formate în jurul originii comune a semidreptelor, în sensul mişcării acelor de ceas, începând cu un unghi oarecare, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $n \geq 91$. Atunci sumele $u_1 + u_2$, $u_3 + u_4, \ldots, u_{89} + u_{90}$ au, împreună, cel mult $359°$. Deoarece sunt 45 de sume şi $8 \cdot 45 = 360$, există o sumă $S < 8°$. Cum $S \geq 2$, rezultă că S este număr prim sau $S = 4 = 2 + 2$, sau $S = 6 = 2 + 4 = 3 + 3$; în toate cazurile deducem că S sau unul dintre termenii săi este număr prim **4p**

Aşadar, numărul cerut este 90 .... **1p**

Problema 4. În interiorul unghiului propriu $\widehat{AOD}$ considerăm punctele B şi C astfel încât $OA = OB$, $OD = OC$, segmentele AC şi BD se intersectează în punctul P, iar semidreapta $(PO$ este bisectoarea unghiului $\widehat{APD}$. Arătaţi că unghiurile $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{COD}$ sunt congruente.



Soluţie. Cerinţa este echivalentă cu $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ **1p**

Fie E şi F picioarele perpendicularelor duse din O pe AC respectiv BD. Atunci $OE = OF$ (deoarece PO este bisectoarea unghiului $\widehat{APD}$) şi $AO = BO$ (din ipoteză), deci triunghiurile dreptunghice OAE şi OBF sunt congruente. Astfel $\widehat{OAE} = \widehat{OBF}$. Analog arătăm că $\widehat{OCE} = \widehat{ODF}$ **4p**

Deoarece segmentele AC şi BD se intersectează, unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ şi $\widehat{COD}$ sunt adiacente, iar punctele O şi B sunt pe părţi diferite ale dreptei AC. Deducem $\widehat{OAC} < \widehat{OAB} < 90°$, ultima inegalitate având loc deoarece unghiul $\widehat{OAB}$ este unghi de la baza triunghiului isoscel OAB. Cum PO este bisectoarea unghiului $\widehat{APD}$, unghiurile $\widehat{APO}$ şi $\widehat{OPD}$ sunt ascuţite, iar unghiul $\widehat{OPD}$ este unghi exterior triunghiului OBP, deci $\widehat{OPD} > \widehat{OBP}$, de unde rezultă că $\widehat{OBP}$ este unghi ascuţit. Analog se arată că unghiurile $\widehat{ODB}$ şi $\widehat{OCA}$ sunt ascuţite. Astfel E şi F sunt in interiorul segmentelor AC, respectiv BD, deci $\widehat{OAC} = \widehat{OAE}$, $\widehat{OCA} = \widehat{OCE}$, $\widehat{OBD} = \widehat{OBP}$ şi $\widehat{ODB} = \widehat{ODP}$. Deducem că unghiurile triunghiurilor OAC, OBD sunt respectiv congruente şi, folosind observaţia iniţială, obţinem concluzia.. **2p**