



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Constanța, 16 aprilie 2022

CLASA a VI-a

Problema 1. Câte numere naturale n au proprietatea $P(n) = S(n) = 8$, unde $P(n)$ și $S(n)$ reprezintă produsul, respectiv suma cifrelor numărului n (scris în baza 10)? Justificați răspunsul!

Problema 2. O mulțime M va fi numită *specială* dacă îndeplinește simultan condițiile:

- este nevidă și are ca elemente doar numere naturale;

- dacă $x \in M$ și x este par, atunci $\frac{x}{2} \in M$;

- dacă $x \in M$ și x este impar, atunci $3 \cdot x + 1 \in M$.

a) Arătați că, dacă M este o mulțime specială și $12 \in M$, atunci M are cel puțin 10 elemente.

b) Arătați că există o infinitate de mulțimi speciale care au exact două elemente impare.

Problema 3. Ana are 200 de monede, având respectiv valorile $1, 2, 2^2, \dots, 2^{199}$. Ea le împarte în 100 de grupe de câte două monede, calculează sumele s_1, s_2, \dots, s_{100} ale valorilor monedelor din fiecare grupă și află cel mai mare divizor comun D al numerelor s_1, s_2, \dots, s_{100} .

a) Arătați că D este impar.

b) Determinați valoarea maximă a lui D pe care o poate obține Ana.

Problema 4. a) Arătați că orice triunghi poate fi împărțit în trei triunghiuri cu interioarele disjuncte, unul fiind dreptunghic, unul isoscel și unul ascuțitunghic.

b) Arătați că orice triunghi neisoscel poate fi împărțit în cinci triunghiuri cu interioarele disjuncte: unul isoscel, unul echilateral, unul ascuțitunghic, unul dreptunghic și unul obtuzunghic.

*Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*