

CLASA a V-a, SOLUȚII ȘI BAREM DE CORECTARE

Problema 1. O mulțime A este alcătuită din 5 numere raționale pozitive. Se știe că mulțimea produselor obținute prin înmulțirea a câte două elemente distincte din A este $\{0,1; 0,15; 0,375; 1; 1,6; 2,5; 3,75; 4; 6; 40\}$. Determinați mulțimea A .

Soluție. Fie $a < b < c < d < e$ elementele lui A (1 punct).
Atunci $ab = 0,1$ și $de = 40$ (2 puncte).
Înmulțind toate produsele avem $(abcde)^4 = 81$ (1 punct).
Rezultă $abcde = 3$, deci $c = 0,75$ (1 punct).
Apoi, din $ac = 0,15$ și $ce = 6$ reiese $a = 0,2$, $e = 8$ și, în final, $b = 0,5$, $d = 5$ (2 puncte).

Problema 2. Între clasele a V-a ale unei școli se desfășoară un turneu de fotbal după regulile obișnuite:

- fiecare echipă dispută câte un meci cu fiecare dintre celelalte echipe;
- în cazul unei victorii, echipa învingătoare primește 3 puncte și echipa învinsă nu primește niciun punct, iar în cazul unui meci egal, ambele echipe primesc câte un punct.

La sfârșitul turneului se constată că numărul total de puncte din clasament este 21. Aflați câte echipe au participat la turneu și câte puncte a luat fiecare echipă. Justificați răspunsul.

Soluție. Deoarece într-un meci se câștigă 2 sau 3 puncte, trebuie să se dispute cel puțin 7 și cel mult 10 meciuri (2 puncte).
Apoi, în cazul în care sunt 2, 3, 4, 5, 6, ... echipe, numărul meciurilor disputate este 1, 2, 6, 10, 15, ..., deci numărul echipelor nu poate fi decât 5 (3 puncte).
În plus, singura posibilitate ca suma punctelor obținute să fie 21 este ca să existe o victorie și 9 meciuri egale, deci punctajele obținute sunt 6, 4, 4, 4, 3 (2 puncte).

Problema 3. Determinați toate perechile de numere naturale impare de două cifre $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ care au proprietatea că prin împărțirea lui $\overline{cd}$ la $\overline{ab}$ se obține restul 2, iar prin împărțirea lui $\overline{abcd}$ la $\overline{cd}$ se obține restul $\overline{ab}$.

Soluție. Avem relațiile $\overline{cd} = m\overline{ab} + 2$, $\overline{abcd} = n\overline{cd} + \overline{ab}$ (2 puncte).
Din a doua relație obținem $99\overline{ab} = (n-1)\overline{cd}$ (1 punct).
Înlocuind, rezultă $99\overline{ab} = (n-1)m\overline{ab} + 2(n-1)$, deci $n-1$ este divizibil cu $\overline{ab}$ (1 punct).
Reiese $n-1 = q\overline{ab}$, de unde $99 = q(m\overline{ab} + 2)$ (1 punct).
Sunt posibile cazurile $m\overline{ab} + 2 = 33$ și $m\overline{ab} + 2 = 99$, ceea ce duce la $\overline{ab} = 31$, $m = 1$, $\overline{cd} = 33$ și $\overline{ab} = 97$, $m = 1$, $\overline{cd} = 99$ (2 puncte).

Problema 4. Dacă în figura 1, alcătuită din 9 bețe de chibrituri, eliminăm trei bețe (de exemplu, cele desenate cu linie subțire), atunci în figura rămasă nu mai apare reprezentat complet niciun triunghi mic.



Figura 1



Figura 2

În construcția din figura 2 sunt 108 bețe și 64 de triunghiuri mici. Determinați numărul minim de bețe care trebuie eliminate, astfel încât în figura rămasă să nu mai existe niciun triunghi mic complet reprezentat.

Soluție. O posibilitate de a „desființa” toate triunghiurile mici este să eliminăm cele 36 de bețe „orizontale” (3 puncte).

Arătăm că aceasta nu este posibil dacă eliminăm mai puține bețe. Pentru aceasta, colorăm alternativ alb/negru triunghiurile fiecărui rând orizontal, începând cu alb de fiecare dată. Fiecare băț eliminat desființează două triunghiuri de culori diferite, sau un singur triunghi. Deoarece numărul triunghiurilor albe este 36 (fiecare rând are cu un triunghi alb mai mult decât negre), trebuie eliminate cel puțin 36 de bețe (4 puncte).