Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

2010
Anul Matematicii în Şcoala Românească
100
www.anulmatematicii.ro

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Călăraşi, 29 mai 2010

CLASA a V-a
Barem de evaluare

Problema 1. a) Arătaţi că numărul 0,16 · 6,25 este natural.

b) Arătaţi că există numerele naturale a şi b şi cifrele $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$, $d_1, d_2, \ldots, d_{10}$, cu $c_{10} \neq 0, d_{10} \neq 0$, astfel încât numărul

$$(a + \overline{0{,}c_1c_2\ldots c_{10}})(b + \overline{0{,}d_1d_2\ldots d_{10}})$$

să fie natural.

Soluţie. a) $0{,}16 \cdot 6{,}25 = 1$ **2p**

b) Considerăm numerele $x = 4^{10}$ şi $y = 25^{10}$. Atunci $xy = 10^{20}$ **3p**

Pe de altă parte, dacă la aceste numere mutăm virgula cu 10 poziţii spre stânga, obţinem două numere care au produsul 1, au câte 10 cifre după virgulă, iar ultima zecimală este nenulă **2p**

Problema 2. Fie M mulţimea numerelor naturale de trei cifre, cu cifra zecilor diferită de 9.

a) Arătaţi că există 28 de numere naturale consecutive, care aparţin mulţimii M, astfel încât suma cifrelor oricăruia dintre ele nu este divizibilă cu 11.

b) Demonstraţi că, oricum am alege 29 de numere naturale consecutive din M, există unul cu suma cifrelor divizibilă cu 11.

Soluţie. a) Un exemplu este $651, 652, \ldots, 678$ **2p**

b) Observăm că printre cele 29 de numere găsim 20 de numere de forma $\overline{ab0}, \overline{ab1}, \overline{ab2}, \ldots, \overline{ab9}, \overline{a(b+1)0}, \overline{a(b+1)1}, \overline{a(b+1)9}$ **3p**

Sumele cifrelor acestor numere sunt $a+b, a+b+1, \ldots, a+b+9, a+(b+1), a+(b+1)+1, \ldots, a+(b+1)+9$. Deoarece acestea reprezintă 11 numere consecutive (şi anume $a+b$, $a+b+1$, $\ldots, a+b+10$), unul dintre ele este divizibil cu 11 .... **2p**

Problema 3. Determinaţi toate mulţimile alcătuite din trei numere naturale nenule, care au proprietatea:

câtul şi restul obţinute prin împărţirea sumei oricăror două elemente ale mulţimii la cel de-al treilea sunt numere distincte din mulţimea $\{1, 2, 3\}$.

Soluţie. Fie $a < b < c$ elementele mulţimii. Cum $a + b < 2c$, câtul împărţirii lui $a + b$ la c este 1, deci $a + b \in \{c + 2,\ c + 3\}$. (1) **1p**

Apoi, cum $b \geq a + 1$ şi $c \geq a + 2$, rezultă $b + c \geq 2a + 3$, deci câtul împărţirii lui $b + c$ la a poate fi 2 numai dacă $b = a + 1$ şi $c = a + 2$, caz în care restul împărţirii lui $a + c$ la b ar fi 0. Ca urmare, $b + c$ poate fi $3a + 1$ sau $3a + 2$. (2) **2p**

Din (1), $a + b + c$ poate fi $2c + 2$, sau $2c + 3$, iar din (2), $a + b + c$ poate fi $4a + 1$, sau $4a + 2$. Din motive de paritate, sunt posibile două cazuri:

• $a + b + c = 2c + 2 = 4a + 2$, de unde rezultă $b = a + 2$ şi $c = 2a$.

Observăm că $a + c = 3a < 3b$, deci câtul împărţirii lui $a + c$ la b nu poate fi 3. Ca urmare, $a + c \in \{b + 2, b + 3, 2b + 1, 2b + 3\}$. Se obţin soluţiile $a = 5$, $b = 7$, $c = 10$ şi $a = 7$, $b = 9$, $c = 14$.......... **2p**

• $a + b + c = 2c + 3 = 4a + 1$, de unde rezultă $b = a + 2$ şi $c = 2a - 1$. La fel, avem $a + c < 3b$, deci $a + c \in \{b + 2, b + 3, 2b + 1, 2b + 3\}$, cu soluţiile $a = 6$, $b = 8$, $c = 11$ şi $a = 8$, $b = 10$, $c = 15$. **2p**

Mulţimile cerute sunt $\{5, 7, 10\}$, $\{6, 8, 11\}$, $\{7, 9, 14\}$, $\{8, 10, 15\}$.

Problema 4. La un concurs de matematică participă 100 de elevi, proba constând în găsirea răspunsului la trei întrebări. La sfârşitul concursului se constată că s-au primit, în total, 200 de răspunsuri corecte.

Arătaţi că există 34 de elevi care au răspuns corect la aceleaşi două întrebări.

Soluţie. Fie a, b, respectiv c numărul elevilor care răspund corect doar la primele două, prima şi a treia, respectiv a doua şi a treia întrebare, d numărul elevilor care răspund corect la toate întrebările şi e numărul elevilor care răspund corect la o singură întrebare. Observăm că $a+b+c+d+e \leqslant 100$ şi $2(a + b + c) + 3d + e = 200$ **3p**

Deducem $a + b + c + 2d \geqslant 100$. Dacă fiecare pereche de întrebări este rezolvată de cel mult 33 de elevi, atunci $a + d \leqslant 33$, $b + d \leqslant 33$, $c + d \leqslant 33$, de unde $a + b + c + 3d \leqslant 99$, contradicţie.......... **4p**