Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Negreşti Oaş, 4 aprilie 2018
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Problema 1. Determinaţi numerele prime $a > b > c$ pentru care $a-b$, $b-c$ şi $a-c$ sunt numere prime diferite.

Soluţie. Dacă $a-b$, $b-c$, $a-c$ sunt numere prime diferite, atunci a, b, c nu pot fi toate impare. Rezultă $c = 2$ şi $a - b = 2$. **2p**

Avem $a - b = 2, b - 2 = x, a - 2 = y$, unde x şi y sunt numere prime şi de aici numerele $a = b + 2, x = b - 2$ şi $y = b$ sunt numere prime. **2p**

Numerele prime $b-2, b, b+2$ sunt numere impare consecutive, deci unul multiplu de 3, de unde $b - 2 = 3$, pentru care $b = 5$ şi $b + 2 = 7$ sunt prime. **2p**

Deci $a = 7, b = 5, c = 2$ sunt numerele căutate. **1p**

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule a, b, c pentru care

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{7c+1}{c+1}.$$

Soluţie. Fie $M = \frac{a+b}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a+b+a^2+b^2}{2} = \frac{a(1+a)+b(1+b)}{2} \in \mathbb{N}$, întrucât $a(1+a)$ şi $b(1+b)$ sunt produse de numere naturale consecutive, deci pare. **1p**

Pe de altă parte $M = \frac{7c+1}{c+1} = 7 - \frac{6}{c+1} \in \mathbb{N}$, deci $\frac{6}{c+1} \in \{1, 2, 3, 6\}$. **2p**

Dacă $\frac{6}{c+1} = 1$, atunci $M = 6$, deci $a(1+a) + b(1+b) = 12$ cu soluţia $a = b = 2$ şi $c = 5$.

Dacă $\frac{6}{c+1} = 2$, atunci $M = 5$, deci $a(1+a) + b(1+b) = 10$ fără soluţie.

Dacă $\frac{6}{c+1} = 3$, atunci $M = 4$, deci $a(1+a) + b(1+b) = 8$ cu soluţiile $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$ şi $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$.

Dacă $\frac{6}{c+1} = 6$, atunci $c = 0$ nu convine. **4p**

Problema 3. Pe o tablă sunt scrise numerele: $1, 2, 3, \ldots, 27$. Un *pas* înseamnă ştergerea a trei numere a, b, c de pe tablă şi scrierea în locul lor a numărului $a + b + c + n$, unde n este un număr natural nenul fixat. Determinaţi numărul natural n ştiind că, după 13 paşi, pe tablă este scris numărul n^2.

Soluţie.

Remarcăm mai întâi că după fiecare pas, dispar de pe tablă două numere de fapt, aşadar după 13 paşi dispar 26 de numere, deci rămâne un singur număr. **1p**

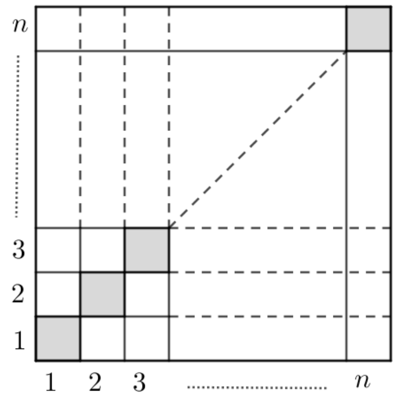
După fiecare pas suma numerelor se măreşte cu n, aşadar după 13 paşi suma de pe tablă (adică numărul rămas pe tablă) este $1 + 2 + \cdots + 27 + 13n = \frac{27 \cdot 28}{2} + 13n = 378 + 13n$. **3p**

Din $378 + 13n = n^2$ rezultă $378 = n(n - 13)$. Divizorii lui 378 sunt
$D_{378} = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 27, 42, 54, 63, 126, 189, 378\}$ dintre care $n = 27$ verifică proprietatea din enunţ. **3p**

Problema 4. Se consideră un număr natural $n \geq 2$ şi un pătrat $n \times n$ (vezi figura alăturată). *Diagonala principală* a acestui pătrat este formată din câmpurile haşurate. Completăm câmpurile aflate sub diagonala principală cu zerouri, iar în restul câmpurilor (inclusiv cele haşurate) scriem numere naturale nenule. După completarea tuturor câmpurilor calculăm suma numerelor aflate pe fiecare linie şi fiecare coloană, obţinând astfel $2n$ sume. Pătratul se numeşte *norocos* dacă valorile celor $2n$ sume sunt egale, într-o anumită ordine, cu numerele $1, 2, \ldots, 2n$.

a) Arătaţi că, pentru $n = 5$, nu există pătrat norocos.

b) Dacă $n = 4$, determinaţi cel mai mare număr natural care apare în completarea unui pătrat norocos.



Soluţie. a) Presupunem că există un pătrat norocos 5×5. Suma tuturor sumelor va fi $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$. Suma sumelor pe linii este egală cu suma sumelor pe coloane, deci suma tuturor sumelor este pară. Dar 55 este impar, aşadar nu există pătrat norocos 5×5. .... **3p**

b) Presupunem că un câmp este ocupat de un număr $m \geq 7$, acesta nu poate fi pe prima sau a doua linie sau coloană, alfel suma ar fi cel puţin egală cu $m + 2 \geq 9 > 8$. Iar în restul câmpurilor se află zerouri, deci $m \leq 6$. **2p**

Un pătrat norocos pentru $m = 6$ este în figura alăturată. Deci cel mai mare număr natural care apare în completarea unui pătrat norocos este 6. .... **2p**

1	1	1	3
2	1	1	0
1	6	0	0
1	0	0	0