Inspectoratul Şcolar al Municipiului Bucureşti

Olimpiada de Matematică, Faza locală, 17 februarie 2007
Soluţii - clasa a XII-a

Subiectul I

a) Inducţie. Pentru $n=0$, $f^{(0)}(x)=f(x)$ şi $\int_0^x \cos t\mathrm{d}t = -\sin t\Big|_0^x = \sin x$. Apoi, dacă proprietatea este adevărată pentru un $n\geq 0$, atunci

$$\begin{aligned}(f^{(n)})'(x) &= \frac{1}{x^{n+2}}\left(-(n+1)\int_0^x t^n\cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{d}t + x\cdot x^n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{x^{n+2}}\left(-t^{n+1}\cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)\Bigg|_0^x + \int_0^x t^{n+1}\left(\cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)\right)'\mathrm{d}t + x^{n+1}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{x^{n+2}}\int_0^x t^{n+1}\cos\left(t+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

.... **5 puncte**

b) Rezultă din $\left|\int_0^x t^n\cos(t+n\pi/2)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x t^n\mathrm{d}t$ .... **4 puncte**

Subiectul II (D. Anca, G.M.B.)

a) $g_1(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$ este derivabilă şi $g_1'(x)=xf(x)+\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t - xf(x)$. Apoi g_1' este derivabilă şi $g_1''(x)=-f(x)$ .... **3 puncte**

b) $g_2(x)=\int_0^{\sqrt{x}} t^2 f(t)\mathrm{d}t + x\int_{\sqrt{x}}^1 f(t)\mathrm{d}t$ este derivabilă şi $g_2'(x)=\int_{\sqrt{x}}^1 f(t)\mathrm{d}t$. Pentru $f(x)=1$, $\forall x\in[0,1]$, g_2' nu este derivabilă în 0. .... **3 puncte**

c) Deoarece f este continuă pe intervalul compact $[0,1]$, există M astfel încât $|f(x)|\leq M$, $\forall x\in[0,1]$. Rezultă $|g_n(x)|\leq M\int_0^{\sqrt[n]{x}} t^n\mathrm{d}t + Mx(1-\sqrt[n]{x})$, de unde reiese că $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=0$, $\forall x\in[0,1]$ .... **3 puncte**

Subiectul III (M. Andronache)

Deoarece elementul neutru are ordinul 1, cele n ordine consecutive nu pot fi decât $1,2,\ldots,n$.

a) Dacă $n=2$ atunci $x^2=e$, $\forall x\in G$, de unde rezultă uşor că G este comutativ. Reciproc, dacă presupunem că G este comutativ şi $n\geq 3$ atunci, luând $a,b\in G$ cu $\operatorname{ord} a = n$ şi $\operatorname{ord} b = n-1$ obţinem $\operatorname{ord} ab = n(n-1) > n$, fals............... **5 puncte**

b) Să presupunem că există $a\neq e$ cu proprietatea dată. Fie $\operatorname{ord} a = n\geq 2$, p un factor prim al lui n şi $b=a^{n/p}$, deci $\operatorname{ord} b = p$, iar $bx=xb$, $\forall x\in G$. Deoarece numerele n şi $n-1$ sunt prime între ele, p este prim cu cel puţin unul din ele. Găsim astfel un element de forma bx, cu $\operatorname{ord} bx\geq p(n-1)>n$, contradicţie. .... **4 puncte**

Subiectul IV (M. Andronache)

a) Dacă $u(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m$, $\forall x\in A$, atunci $a_0=1$, deci orice $x\neq 0$ ar avea inversul $-a_1x-a_2x-\ldots-a_mx^{m-1}$, contradicţie. .... **3 puncte**

b) Funcţiile $f_{a,b}(x)=ax+b$ sunt distincte, deoarece $f_{a,b}=f_{c,d}\Rightarrow f_{a,b}(0)=f_{c,d}(0)$ şi $f_{a,b}(1)=f_{c,d}(1)\Rightarrow b=d$ şi $a=c$. Avem astfel n^2 funcţii polinomiale distincte.

Demonstrăm acum că există $a,b\in A, a\neq 0, b\neq 0, a\neq b$ astfel încât $ab=0$. Din ipoteză rezultă imediat că există a, divizor al lui 0. Să presupunem că singura soluţie nenulă pentru $ax=0$ este $x=a$. Atunci $a(ax)=0\Rightarrow ax=a$ sau $ax=0\Rightarrow x-1=0$ sau $x-1=a$ sau $x=a$ sau $x=0$, deci A ar avea doar elementele $0,1,a,a+1$ – fals.

Considerăm acum polinomul $g=(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_{n-1})$, unde $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ sunt elementele nenule ale lui A. Deoarece g este monic, pentru orice $f\in A[X]$ găsim $q,r\in A[X]$ astfel încât $f=gq+r$ şi $\operatorname{grad} r\leq n-2$. Avem $f(x)=r(x)$, $\forall x\in A$, deci orice funcţie polinomială este egală cu una de grad $\leq n-2$. Dar numărul funcţiilor polinomiale de grad $\leq n-2$ este cel mult n^{n-1}, $q.e.d$ .... **6 puncte**