

**Olimpiada de Matematică**  
**Faza locală, 17 februarie 2007**  
**Soluții - clasa a XI-a**

**Subiectul I**

a) Formăm un determinant  $\Delta$  de ordin 4, care are ca minori ai elementelor coloanei a patra determinanții dați (permutați în mod convenabil), iar pe coloana a patra elementele sunt 1. Atunci  $\Delta = 0$  și este egal cu  $d_1 - d_2 + d_3 - d_4$ . . . . . **5 puncte**

b) Folosind coordonate, din ipoteză rezultă că dreptele care trec prin  $(a_1, a_2)$ ,  $(d_1, d_2)$  și  $(b_1, b_2)$ ,  $(c_1, c_2)$  sunt paralele; la fel dreptele care trec prin  $(a_1, a_2)$ ,  $(b_1, b_2)$  și  $(c_1, c_2)$ ,  $(d_1, d_2)$ . Obținem astfel un paralelogram și, folosindu-l, avem concluzia. . . **4 puncte**

**Subiectul II**

a) Avem, de exemplu, soluțiile  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b & -a \end{pmatrix}$  . . . . . **4 puncte**

b) Dacă  $n$  este par și  $X_2$  este matricea de la a), avem soluțiile

$$\begin{pmatrix} X_2 & \dots & O_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ O_2 & \dots & X_2 \end{pmatrix}.$$

Dacă  $n$  este impar, ecuația este echivalentă cu  $(X + a/2I_n)^2 = (a^2/4 - b)I_n$ , care nu are soluții în cazul în care  $a^2 - 4b < 0$ , deoarece determinanții matricelor din cei doi membri ai ecuației au semne opuse. . . . . **5 puncte**

**Subiectul III (I. Crișan, G.M.B.)**

a) Fiind compunere și cât de funcții care au limită finită și nenulă, funcția dată are limită în orice punct din  $(0, \infty) \setminus \{e^k | k \in \mathbb{Z}\}$ . În punctele de forma  $e^k$  limitele laterale sunt diferite, deci limita nu există. De asemenea, nu există limita în 0 (luăm șirurile  $f(e^{-n})_{n \geq 1} \rightarrow 1$  și  $f(e^{-n+1/2})_{n \geq 1} \rightarrow e^{1/2}$ ) și la  $\infty$  (luăm șirurile  $f(e^n)_{n \geq 1} \rightarrow 1$  și  $f(e^{n+1/2})_{n \geq 1} \rightarrow e^{1/2}$ ) . . . . . **5 puncte**

b) Pentru  $1 < a \leq e$  luăm  $x_n = [ae^n]$ . Pentru  $n \geq n_0$  astfel încât  $ae^n - 1 > e^n$  avem  $[\ln x_n] = n$ , deci  $a - e^{-n} \leq f(x_n) \leq a$  și  $f(x_n) \rightarrow a$ . Pentru  $a = 1$  putem lua  $x_n = [e^n] + 1$ . . . . . **4 puncte**

**Subiectul IV**

a) Dacă luăm a  $n$ -a zecimală a lui  $b$  egală cu a  $n$ -a zecimală a lui  $x_{n+1}$ , atunci  $|b - x_{p+1}| \leq 10^{-p}$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n) \rightarrow b$ . . . . . **3 puncte**

b) Da. Dacă luăm  $a = 0,100100\dots$  și  $x_{n+1} = x_n$  pentru  $n \neq 10^p$ , atunci  $b$  are grupuri de cifre de forma 100100... oricât de lungi, dar nu are perioada 100. **3 puncte**

c) Dacă  $a$  are toate zecimalele nule, cu excepția celor de pe pozițiile de forma  $10^p$ , atunci, deoarece o zecimală nu se poate deplasa decât cu cel mult trei poziții, orice  $b$  are grupuri de cifre nule oricât de lungi, dar nu are perioada 0. . . . . **3 puncte**