

Olimpiada de Matematică
Faza locală, 17 februarie 2007
Clasa a XI-a

Subiectul I

Considerăm determinanții cu elemente numere reale:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se știe că trei dintre ei sunt egali cu 1. Demonstrați că:

- a) și cel de-al patrulea este egal cu 1;
- b) $a_1 + c_1 = b_1 + d_1$ și $a_2 + c_2 = b_2 + d_2$.

Subiectul II

Fie ecuația $X^2 + aX + bI_n = O_n$, $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, unde $a, b, n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

a) Demonstrați că în cazul $n = 2$ ecuația are o infinitate de soluții, oricare ar fi a, b .

b) Pentru care valori ale lui n este adevărat că ecuația are o infinitate de soluții, oricare ar fi a, b ?

Subiectul III (Gazeta Matematică)

Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^{[\ln x]}}$. (aici $[t]$ reprezintă partea întreagă a numărului real t)

a) Determinați punctele de acumulare ale domeniului de definiție în care funcția nu are limită.

b) Demonstrați că pentru orice $a \in [1, e]$ există un subșir al șirului $(f(n))_{n \geq 1}$ cu limita a .

Subiectul IV

Fie $a \in [0, 1)$ un număr scris în formă zecimală. Construim un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ astfel: x_1 se obține permutând în mod arbitrar primele trei zecimale ale lui a , x_2 se obține permutând în mod arbitrar zecimalele a doua, a treia și a patra ale lui x_1 și, în general, x_{n+1} se obține permutând în mod arbitrar zecimalele $n + 1, n + 2$ și $n + 3$ ale lui x_n , $\forall n \geq 1$.

- a) Arătați că orice șir astfel construit este convergent către o limită b .
- b) Este posibil ca a să fie rațional și b să fie irațional ?
- c) Găsiți un a pentru care orice șir $(x_n)_{n \geq 1}$, construit ca mai sus, are limită irațională.

Fiecare subiect se notează de la 1 la 10. Timp de lucru: 3 ore