Inspectoratul Şcolar al Municipiului Bucureşti

Olimpiada de Matematică
Faza locală, 17 februarie 2007
Soluţii - clasa a X-a

Subiectul I (a) Gh Tutulan, b) I.Tudor, G.M.B)

a) Sistemul este echivalent cu $|z| = \sqrt{a}$ şi $|z| = |z-a|$, deci soluţiile sunt afixele punctelor de intersecţie ale cercului cu centrul în origine, de rază $\sqrt{a}$, cu mediatoarea segmentului cu capetele de afixe $0, a$. Observăm că:
• dacă $\sqrt{a} < a/2 \Leftrightarrow a > 4$ atunci nu există soluţii;
• dacă $\sqrt{a} = a/2 \Leftrightarrow a = 4$ atunci există soluţia unică $z = 2$;
• dacă $\sqrt{a} > a/2 \Leftrightarrow 0 < a < 4$ atunci $z_{1,2} = a/2 \pm i\sqrt{3a/4}$ .... **5 puncte**

b) Observăm că $\log_{100} 110{,}25 = \log_{100} 10{,}5^2 = \lg 10{,}5$, deci avem soluţia $x = 100$. Să arătăm că această soluţie este unică:
• pentru $0 < x < 1$ avem $\log_x (x + 10{,}25) < 0 < \lg 10{,}5$;
• pentru $x > 1$ avem

$$\log_x (x+10{,}25) = \frac{\lg(x+10{,}25)}{\lg x} = \frac{\lg x+\lg(1+10{,}25/x)}{\lg x} = 1 + \frac{\lg(1+10{,}25/x)}{\lg x},$$

expresie care defineşte o funcţie strict descrescătoare. .... **4 puncte**

Subiectul II

a) Dreapta este graficul unei funcţii de forma $y = \alpha x - pq$ şi $f(p) = \alpha p - pq$, $f(q) = \alpha q - pq$. Dacă $f(x) = ax^2 + bx + c$ atunci $f(p) - f(q) = (p-q)(a(p+q)+b) = \alpha(p-q)$ şi $p \neq q \Rightarrow \alpha = a(p+q)+b$, apoi $ap^2 + bp + c = ap^2 + apq + bp - pq \, \forall p, q \in \mathbb{R}$, de unde $a = 1$, $c = 0$. Funcţiile cerute sunt cele de forma $f(x) = x^2 + bx$, $b \in \mathbb{R}$...... **4 puncte**

b) Cu notaţiile de la a) avem $\alpha = \frac{f(p)+pq}{p} = \frac{f(q)+pq}{q}$, sau $\frac{f(p)}{p} - p = \frac{f(q)}{q} - q$, $\forall p, q \in \mathbb{R}^*$. Astfel $\frac{f(p)}{p} - p$ este o constantă b, deci $f(p) = p^2 + pb$, $\forall p \in \mathbb{R}^*$. Din ipoteză reiese şi $f(0) = 0$, de unde $f(p) = p^2 + pb$, $\forall p \in \mathbb{R}$ .... **5 puncte**

Subiectul III

a) Luăm laturile în ordinea $1, 6, 2, 4, 3, 5$. .... **4 puncte**

b) Fie $w = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Aşezând hexagonul în mod convenabil, vârfurile vor avea afixele $6, 6+aw, 6+aw+bw^2, 6-c+aw+bw^2, 6+aw+bw^2-c-dw$, $6+aw+bw^2-c-dw-ew^2 = 0$ unde a, b, c, d, e sunt $1, 2, 3, 4, 5$. Din ultima egalitate şi din $w^2 = w-1$ rezultă $6-c = d-a = b-e$. Aceasta nu se poate decât dacă hexagonul are laturile în ordinea de mai sus, sau în ordinea $6, 3, 2, 5, 4, 1$ (într-un sens sau în celălalt), de unde concluzia. .... **5 puncte**

Subiectul IV

a) Observăm că $\emptyset \subset f(\emptyset)$. Fie $\mathcal{R} = \{X | X \subset A, f(X) \subset X\}$ şi $B = \bigcup_{X\in\mathcal{R}} X$. Dacă $x \in B$ atunci $x \in X \subset B$, deci $x \in f(X) \subset f(B)$. Astfel, $x \in B \Rightarrow x \in f(B)$, de unde $B \subset f(B)$. Rezultă că $f(B) \subset f(f(B))$, deci $f(B)$ este una din submulţimile a căror reuniune este B. Astfel $f(B) \subset B$, şi reiese $f(B) = B$ .... **4 puncte**

b) Fie n_p numărul mulţimilor cu p elemente. Fixăm r pentru care $n_0+n_1+\ldots+n_r < k \leq n_0+n_1+\ldots+n_r+n_{r+1}$. Alegem $k-n_0-\ldots-n_r-1$ mulţimi de cardinal $r+1$. Definim acum $f_k(X) = X$ dacă $|X| \leq r$ sau dacă X este una din mulţimile alese şi $f(X) = A$ în restul cazurilor. Atunci $f_k(X) = X$ pentru cele $k-1$ mulţimi de cardinal $\leq r+1$ precum şi pentru $X = A$. .... **5 puncte**