

Olimpiada de Matematică
Faza locală, 17 februarie 2007
Clasa a X-a

Subiectul I (Gazeta Matematică)

- a) Rezolvați în $\mathbb{C}$ sistemul $|z| = \left| \frac{a}{z} \right| = |z - a|$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
b) Rezolvați ecuația $\log_x(x + 10,25) = \lg 10,5$.

Subiectul II

Considerăm funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea: pentru orice puncte distincte $A(p, f(p))$ și $B(q, f(q))$ situate pe graficul funcției, dreapta AB taie axa Oy în punctul $(0, -pq)$.

- a) Determinați funcțiile de gradul doi care au această proprietate.
b) Demonstrați că orice funcție cu această proprietate este o funcție de gradul doi.

Subiectul III

- a) Demonstrați că există un hexagon convex, cu unghiurile congruente și cu laturile de lungimi 1, 2, 3, 4, 5, 6 (nu neapărat în această ordine).
b) Demonstrați că există exact două tipuri de hexagoane care îndeplinesc condițiile de la a).

Subiectul IV

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathcal{P}(A)$ mulțimea celor 2^n părți ale mulțimii $A = \{1, 2, \dots, n\}$. O funcție f va fi numită *ascendentă* dacă $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ și, pentru orice $X, Y \subset A$, are loc relația: $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$.

- a) Demonstrați că dacă f este o funcție ascendentă atunci există $B \subset A$ astfel încât $f(B) = B$.
b) Demonstrați că pentru orice k întreg, $1 \leq k \leq 2^n$, există o funcție ascendentă f_k astfel încât ecuația $f_k(X) = X$, $X \subset A$ să aibă exact k soluții.

Fiecare subiect se notează de la 1 la 10. Timp de lucru: 3 ore