

Olimpiada de Matematică
Faza locală, 17 februarie 2007
Soluții - clasa a IX-a

Subiectul I

- a) Observăm că $x = 1$ este soluție pentru orice E_n **4 puncte**
b) $\Delta' = b^2 - ac + (2b - a - c)n \geq 0, \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + c = 2b$. Apoi
- $a + n \neq 0 \Rightarrow \Delta' = \frac{(a-c)^2}{4}, x_{1,2} = \frac{b+n \pm (a-c)/2}{a+n} \in \mathbb{Q}$ **4 puncte**
 - $a + n = 0 \Rightarrow x = \frac{c+n}{2b+2n} \in \mathbb{Q}$ **1 punct**

Subiectul II

- a) Din asemănări $\frac{GP}{PC} = \frac{GY}{BC} = \frac{GY}{2MC} = \frac{1}{2} \frac{AG}{AM} = \frac{k}{2}$ **2 puncte**
b) $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{k+2} \overrightarrow{CG} = \frac{2}{k+2} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}) = \frac{2}{k+2} (-\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AM})$
 $= \frac{2}{k+2} (-\overrightarrow{AC} + \frac{k}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})) = \frac{k}{k+2} \overrightarrow{AB} + \frac{k-2}{k+2} \overrightarrow{AC}$ **4 puncte**
c) Rezultă
 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \frac{k}{k+2} \overrightarrow{AB} + \frac{k-2}{k+2} \overrightarrow{AC} = \frac{k-1}{2(k+2)} \overrightarrow{AB} + \frac{3k-2}{2(k+2)} \overrightarrow{AC}$.
Când G este centrul de greutate, $k = \frac{2}{3}$, $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$. Analog avem
 $\overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$, de unde concluzia. **3 puncte**

Subiectul III

- a) Așezăm pătratul cu două laturi pe verticală. Numărând după colțurile din stânga sus avem n^2 pătrate de latură 1, $(n-1)^2$ pătrate cu latura 2, . . . 1^2 pătrate de latură n . Prin adunare obținem concluzia. **4 puncte**
b) Observăm că pentru fiecare pătrat de la a) avem două triunghiuri cu ipotenuza verticală, două triunghiuri cu ipotenuza orizontală, două triunghiuri cu ipotenuza pe direcția unei diagonale și două triunghiuri cu ipotenuza pe direcția celeilalte diagonale. Pe de altă parte, nu avem și alte triunghiuri în afară de cele enumerate. Astfel, numărul triunghiurilor este de opt ori mai mare decât cel al pătratelor. **5 puncte**

Subiectul IV (V. Zidaru, Gazeta Matematică)

- a) Inducție după n . Pentru $n = 1$, $3^2 = 2 \cdot 4 + 1$, deci câțul este 4. Presupunem acum că $3^{2^n} = 2^n(2q) + 1 = 2^{n+1}q + 1$. Atunci
 $3^{2^{n+1}} = 3^{2^n \cdot 2} = (3^{2^n})^2 = (2^{n+1}q + 1)^2 = 2^{n+1} \cdot 2(2^nq^2 + q) + 1$,
deci la împărțirea cu 2^{n+1} obținem câțul par $2(2^nq^2 + q)$ **4 puncte**
b) Conform a), $a_{2^n}, n \in \mathbb{N}^*$ este par.
Apoi, deoarece $3^n > n$ (inducție!), $a_{3^n} = 3^{3^n - n}$ este divizibil cu 3.
În sfârșit, arătăm ca la a) că 3^{4^n} dă la împărțirea cu 4^n restul 1 și un cât divizibil cu 5, deci a_{4^n} este divizibil cu 5. **5 puncte**