

Olimpiada de Matematică
Faza locală, 17 februarie 2007
Clasa a IX-a

Subiectul I

Fie a, b, c numere raționale. Pentru fiecare $n \in \mathbb{Z}$ se consideră ecuația

$$E_n : (a + n)x^2 - 2(b + n)x + c + n = 0.$$

a) Arătați că, dacă a, b, c sunt în progresie aritmetică, atunci ecuațiile E_n au o rădăcină comună.

b) Arătați că, dacă fiecare ecuație E_n are rădăcini reale, atunci a, b, c sunt în progresie aritmetică și fiecare ecuație are rădăcini raționale.

Subiectul II

Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC . Paralela la BC dusă printr-un punct G al segmentului (AM) taie AB în X și AC în Y ; CX și GB se taie în Q , iar CG și BY se taie în P . Notăm $k = \frac{AG}{AM}$.

a) Arătați că $\frac{GP}{PC} = \frac{k}{2}$.

b) Exprimați vectorul \overrightarrow{CP} în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ și scalarul k .

c) Demonstrați că, dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci triunghiul MPQ este asemenea cu triunghiul ABC .

Subiectul III

Împărțim un pătrat prin paralele la laturi în n^2 pătrate congruente.

a) Demonstrați că numărul pătratelor de diferite dimensiuni care apar în figura obținută este $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Dacă ducem diagonalele în fiecare pătrat mic, câte triunghiuri dreptunghice isoscele de diferite dimensiuni apar în figura formată?

Subiectul IV (Gazeta Matematică)

a) Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, prin împărțirea cu rest a numărului 3^{2^n} la 2^n se obține un cât par.

b) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ dat de

$$a_n = \left[\frac{3^n}{n} \right], \forall n \in \mathbb{N}^*$$

are o infinitate de termeni pari, o infinitate de termeni divizibili cu 3 și o infinitate de termeni divizibili cu 5. (cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x)

Fiecare subiect se notează de la 1 la 10. Timp de lucru: 3 ore