Clasa a XII-a — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Să se determine funcţiile continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$(a^2+ab+b^2)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Alegem $a = 0$ şi $b = t > 0$. Atunci

$$t^2 F(t) = 3\int_0^t x^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

unde $F(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$. .... **1 punct**

Prin derivare rezultă $2tF(t) + t^2 f(t) = 3t^2 f(t)$, deci $2t(tf(t) - F(t)) = 0$, adică $\left(\frac{F(t)}{t}\right)' = 0$, pentru orice $t \in (0, \infty)$. .... **3 puncte**

Rezultă că funcţia $g(t) = \frac{F(t)}{t}$ este constantă pe intervalul $(0,\infty)$, deci $F(t) = kt$, adică $f(t) = k$, $t \in (0, \infty)$. .... **1 punct**

Procedând similar pe intervalul $(-\infty, 0)$, rezultă că există constantele k_1, k_2, k astfel încât

$$f(t) = \begin{cases} k_1, & t < 0, \\ k_2, & t = 0, \\ k, & t > 0 \end{cases}$$

.... **1 punct**

Cum f este continuă, rezultă $k_1 = k_2 = k$, deci $f(t) = k$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Se verifică imediat că funcţiile constante pe $\mathbb{R}$ satisfac relatia din enunţ. .... **1 punct**

Problema 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel care îndeplineşte simultan următoarele două condiţii:

(1) A nu este corp,

(2) oricare ar fi x un element neinversabil al lui A, există un număr întreg $m \geq 1$, care depinde de x, astfel încât

$$x = x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^m}.$$

Să se arate că:

(a) $x + x = 0$, oricare ar fi $x \in A$,

(b) $x^2 = x$, oricare ar fi elementul neinversabil $x \in A$.

Soluţie. **(a)** Este suficient să demonstrăm că $1+1=0$. Fie x un element neinversabil, fie $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x = x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^m}$, şi $y = x + x^2 + \cdots + x^{2^m - 1}$. În mod evident, $xy = x$, deci $xy^k = x$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Întrucât x este neinversabil, y este neinversabil, deci există $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $-y = (-y)^2 + (-y)^3 + \cdots + (-y)^{2^p - 1} + (-y)^{2^p} = y^2 - y^3 + \cdots - y^{2^p - 1} + y^{2^p}$. Prin urmare, $-x = -xy = xy^2 - xy^3 + \cdots - xy^{2^p-1} + xy^{2^p} = x - x + \cdots - x + x = x$, i.e., $x + x = 0$. .... **2 puncte**

Fie x un element nenul şi neinversabil. Cum $2x = 0$, rezultă că 2 este neinversabil, deci $2 + 2 = 0$ şi $2 = 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2^m}$, unde $m \in \mathbb{N}^*$. Relaţia $2 + 2 = 0$ implică $2^2 = 0$, deci $2^k = 0$, oricare ar fi $k \geq 2$. Prin urmare, $2 = 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2^m} = 0$. .... **1 punct**

(b) Fie x un element neinversabil al lui A şi $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x = x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^m}$. Atunci $x^2 = x^3 + x^4 + \cdots + x^{2^m+1}$. Întrucât $1+1=0$, prin adunarea celor două relaţii obţinem $x^{2^m+1} = x$. .... **1 punct**

Relaţiile $1+1=0$ şi $x^{2^m+1} = x$ implică $(x^2+x)^{2^m} = x^{2^{m+1}} + x^{2^m} = x^{2^m+1} \cdot x^{2^m-1} + x^{2^m} = x \cdot x^{2^m-1} + x^{2^m} = x^{2^m} + x^{2^m} = 0$. .... **1 punct**

Vom arăta că $x^2 + x = 0$, de unde concluzia. Fie $y = x^2 + x$ şi k cel mai mic număr natural nenul, astfel încât $y^k = 0$ — un astfel de k există, deoarece $y^{2^m} = 0$. În cazul în care $k > 1$, elementul y^{k-1} este neinversabil în A şi există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $y^{k-1} = \left(y^{k-1}\right)^{2^n+1} = y^{(k-1)(2^n+1)}$. Întrucât $(k-1)(2^n+1) \geq k$, rezultă că $y^{(k-1)(2^n+1)} = 0$, deci $y^{k-1} = 0$ — în contradicţie cu minimalitatea lui k. Prin urmare, $k = 1$ şi $y = 0$. .... **2 puncte**

Problema 3. Fie $a \in (0,1)$ şi $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor crescătoare $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$, astfel încât $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Să se determine:

(a) $\displaystyle\max_{f\in\mathcal{C}} \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\max_{f\in\mathcal{C}} \int_0^a \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x$.

Soluţia 1. **(a)** Fie f o funcţie din mulţimea $\mathcal{C}$. Arătăm că

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \leq a.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} a - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x &= a\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = a\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x - (1-a)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq a\int_a^1 f(a)\,\mathrm{d}x - (1-a)\int_0^a f(a)\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Cum pentru funcţia constantă $f \equiv 1$ are loc egalitatea, rezultă că maximumul cerut este egal cu a. .... **2 puncte**

(b) Maximumul cerut este a, dacă $a \leq 1/2$, şi $1/(4(1-a))$, dacă $a > 1/2$; aceste valori sunt atinse, de exemplu, pentru $f \equiv 1$, în primul caz, şi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 2a-1, \\ 1/(2(1-a)), & \text{dacă } 2a-1 < x \leq 1, \end{cases}$$

în al doilea caz. .... **2 puncte**

În continuare, vom arăta că

$$\int_0^a (f(x))^2\,\mathrm{d}x \le \begin{cases} a, & \text{dacă } a \le 1/2, \\ 1/(4(1-a)), & \text{dacă } a > 1/2. \end{cases}$$

În acest scop, fie f o funcţie din mulţimea $\mathcal{C}$. Ţinând cont de condiţiile din enunţ,

$$\begin{aligned} \int_0^a (f(x))^2\,\mathrm{d}x \le f(a)\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x &\le \left(\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{1-a}\left(1-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

.... **1 punct**

Să observăm că

$$\max\{t(1-t)\colon t \le a\} = \begin{cases} a(1-a), & \text{dacă } a \le 1/2, \\ 1/4, & \text{dacă } a > 1/2; \end{cases}$$

în ambele cazuri, maximumul este atins într-un singur punct: în $t = a$, în primul caz, şi în $t = 1/2$, în al doilea.

Prin urmare,

$$\int_0^a (f(x))^2\,\mathrm{d}x \le \begin{cases} a, & \text{dacă } a \le 1/2, \\ 1/(4(1-a)), & \text{dacă } a > 1/2. \end{cases}$$

.... **2 puncte**

Soluţia 2. (b) Ţinând cont de exemplele din prima soluţie, este suficient să arătăm că

$$\int_0^a (f(x))^2\,\mathrm{d}x \le \begin{cases} a, & \text{dacă } a \le 1/2, \\ 1/(4(1-a)), & \text{dacă } a > 1/2. \end{cases}$$

Fie f o funcţie din mulţimea $\mathcal{C}$. Dacă $f(a) < 1$, atunci

$$\int_0^a (f(x))^2\,\mathrm{d}x \le \int_0^a (f(a))^2\,\mathrm{d}x = a\,(f(a))^2 < a.$$

Dacă $f(a) \ge 1$, considerăm funcţia $\varphi\colon [0,1] \to [0,\infty)$,

$$\varphi(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + (1-t)f(a).$$

Această funcţie este evident continuă, descrescătoare pe intervalul închis $[0,a]$ şi crescătoare pe intervalul închis $[a,1]$. Întrucât $\varphi(1) = 1$, rezultă că $\varphi(a) \le 1$ (acest lucru poate fi demonstrat şi în mod direct). Pe de altă parte, $\varphi(0) = f(a) \ge 1$, deci există un punct b în intervalul închis $[0,a]$, astfel încât $\varphi(b) = 1$, i.e.,

$$\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - (1-b)f(a).$$

Fie $g\colon [0,1] \to [0,\infty)$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } 0 \le x \le b, \\ f(a), & \text{dacă } b < x \le 1. \end{cases}$$

Este uşor de verificat că g aparţine mulţimii $\mathcal{C}$; în plus, dacă $0 \le x \le a$, atunci $g(x) \ge f(x) \ge 0$, deci

$$\int_0^a (g(x))^2 \,\mathrm{d}x \ge \int_0^a (f(x))^2 \,\mathrm{d}x.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}\int_0^a (g(x))^2 \,\mathrm{d}x \le g(a) \int_0^a g(x) \,\mathrm{d}x = f(a) \left(\int_0^b f(x) \,\mathrm{d}x + (a-b)f(a) \right) \\ = f(a)\,(1 - (1-b)f(a) + (a-b)f(a)) = f(a)\big(1-(1-a)f(a)\big).\end{aligned}$$

Să observăm că

$$\max\{t(1-(1-a)t) \colon t \ge 1\} = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \le 1/2, \\ 1/(4(1-a)), & \text{dacă } a > 1/2; \end{cases}$$

în ambele cazuri, maximumul este atins într-un singur punct: în $t = 1$, în primul caz, şi în $t = 1/(2(1-a))$, în al doilea.

Prin urmare,

$$\int_0^a (f(x))^2 \,\mathrm{d}x \le \int_0^a (g(x))^2 \,\mathrm{d}x \le \begin{cases} a, & \text{dacă } a \le 1/2, \\ 1/(4(1-a)), & \text{dacă } a > 1/2. \end{cases}$$

Remarcă. Se poate arăta că, exceptând punctele $x = 0$ şi $x = 1$ — cărora li se adaugă la **(b)** punctul $x = 2a-1$, în cazul în care $a > 1/2$ —, funcţiile care realizează maximumul integralelor din enunţ sunt unic determinate; în punctele menţionate, plajele valorice admisibile rezultă din monotonie.

Problema 4. Fie $n \ge 2$ un număr natural, $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ cu proprietatea că $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m \text{ ori}} \ne 0$, $m = 2, \ldots, n$, $f \in K[X]$ un polinom de gard n şi G un subgrup al grupului aditiv $(K, +)$, $G \ne K$. Să se arate că există $a \in K$, astfel încât $f(a) \notin G$.

Soluţie. Fie $g \in K[X]$ un polinom de grad $m \in \{2, \ldots, n\}$. Polinomul $h(X) = g(X+1) - g(X)$ are gradul $m - 1$ şi, în plus, dacă $\operatorname{Im} g \subseteq G$, atunci şi $\operatorname{Im} h \subseteq G$. .... **3 puncte**

Presupunem că $\operatorname{Im} f \subseteq G$. Considerăm polinoamele f_0, f_1, …, f_{n-1}, definite astfel:

$$f_0 = f \quad \text{şi} \quad f_k(X) = f_{k-1}(X+1) - f_{k-1}(X), \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Din remarca anterioară, $\deg f_k = n - k$ şi $\operatorname{Im} f_k \subseteq G$. În particular, $\deg f_{n-1} = 1$ şi $\operatorname{Im} f_{n-1} \subseteq G$. .... **3 puncte**

Cum funcţia polinomială $\tilde{f}_{n-1} \colon K \to K$ este surjectivă, rezultă că $\operatorname{Im} f_{n-1} = K$, deci $G = K$ — fals. .... **1 punct**

Remarcă. Problema arată că, în condiţiile din enunţ, grupul aditiv al lui K este generat de imaginea funcţiei polinomiale $\tilde{f}$.

În caracteristică zero, $\deg f$ poate să fie oricât de mare. În caracteristică p, unde p este prim, condiţia $\deg f < p$ este însă esenţială. De exemplu, în cazul în care $K = \mathbb{F}_4$, corpul cu patru elemente, iar $f = X^2 + X + 1$, grupul aditiv generat de $\operatorname{Im} f$ este $\{0, 1\} \ne \mathbb{F}_4$.