Societatea de Ştiinţe Matematice din România Ministerul Educaţiei Naţionale

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Braşov, 2 aprilie 2013

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a XI-a

Problema 1. Fie A o matrice neinversabilă de ordin n cu elemente reale, $n \geq 2$, şi fie A^* adjuncta matricei A. Arătaţi că $\mathrm{tr}(A^*) \neq -1$ dacă şi numai dacă matricea $I_n + A^*$ este inversabilă.

Soluţie. Deoarece matricea A este neinversabilă, avem $\mathrm{rang}(A) \leq n-1$. Distingem cazurile:

i. $\mathrm{rang}(A) \leq n-2$. Atunci $A^* = O_n$ şi echivalenţa este evidentă.

.... **1p**

ii. $\mathrm{rang}(A) = n-1$. Atunci $AA^* = O_n$ şi, din inegalitatea lui Sylvester, $0 \geq \mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(A^*) - n$, de unde $\mathrm{rang}(A^*) \leq 1$.

.... **2p**

Atunci există o matrice linie $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ şi o matrice coloană $C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ astfel încât $A = CL$. Observăm că $LC = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, cu $a = \mathrm{tr}(A^*)$ şi $(A^*)^2 = CLCL = C(a)L = aA^*$.

.... **2p**

Notăm $B = I_n + A^*$. Atunci $(B - I_n)^2 = a(B - I_n)$ se scrie $B((a+2)I_n - B) = (a+1)I_n$, de unde rezultă că $a \neq -1$ implică B inversabilă.

.... **1p**

În plus, dacă B este inversabilă dar $a = -1$, atunci $B(I_n - B) = O_n$ atrage $B = I_n$ şi apoi $A^* = O_n$. Atunci $-1 = \mathrm{tr}\,(A^*) = 0$, fals.

.... **1p**

Problema 2. Fie m şi n numere naturale, $m, n \geq 2$. Considerăm matricele $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nu toate nilpotente. Demonstraţi că există un număr întreg $k > 0$ astfel încât $A_1^k + A_2^k + \cdots + A_m^k \neq O_n$.

Soluţie. Notăm cu $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{in}$ valorile proprii ale matricei A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Presupunem prin absurd că $A_1^k + A_2^k + \cdots + A_m^k = O_n$, oricare ar fi $k \geq 1$. Atunci $\mathrm{tr}\,(A_1^k) + \mathrm{tr}\,(A_2^k) + \cdots + \mathrm{tr}\,(A_m^k) = 0$,

.... **2p**

de unde $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}^k = 0$.

.... **2p**

Din relaţiile lui Newton, egalităţile $\displaystyle\sum_{ij} \lambda_{ij}^k = 0$, $k \geq 1$, implică $\lambda_{ij} = 0$, oricare ar fi $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

.... **2p**

Atunci $A_i^n = O_n$, $i = 1, 2, \dots, m$, contradicţie.
.... **1p**

Problema 3. O funcţie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ se numeşte *contractibilă* dacă, pentru orice numere $x, y \in (0, \infty)$, avem $\lim_{n\to\infty}(f^n(x) - f^n(y)) = 0$, unde $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$.

a) Considerăm $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie contractibilă, continuă, cu proprietatea că are un punct fix, adică există $x_0 \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x_0) = x_0$. Arătaţi că $f(x) > x$, oricare ar fi $x \in (0, x_0)$ şi $f(x) < x$, oricare ar fi $x \in (x_0, \infty)$.

b) Arătaţi că funcţia $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ dată prin $f(x) = x + 1/x$ este contractibilă, dar nu are puncte fixe.

Soluţie. a) Presupunem prin reducere la absurd că f ar admite ar admite un al doilea punct fix $x_1 \in (0, \infty) \setminus \{x_0\}$. Atunci $\lim_{n\to\infty}(f^n(x_0) - f^n(x_1)) = x_0 - x_1 \neq 0$, contradicţie. În acest caz, din continuitatea lui f (proprietatea Darboux) deducem $f(x) < x$, $\forall\, x \in (0, x_0)$ sau $f(x) > x$, $\forall\, x \in (0, x_0)$.
.... **1p**

In primul caz obţinem inductiv că $0 < f^{n+1}(x) < f^n(x) < x$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in (0, x_0)$. Deducem că şirul $a_n = (f^n(x))_{n\geq 1}$ converge; fie a limita sa. Dacă $a > 0$, atunci din $a_{n+1} = f(a_n)$ rezultă $a = f(a)$, fals. Atunci $a = 0$, de unde rezultă $\lim_{n\to\infty}(f^n(x_0) - f^n(x)) = x_0 \neq 0$, $\forall\, x \in (0, x_0)$, contradicţie. Rămâne $f(x) > x$, oricare ar fi $x \in (0, x_0)$.
.... **1p**

Analog, $f(x) > x$, $\forall\, x \in (x_0, \infty)$ sau $f(x) < x$, $\forall\, x \in (x_0, \infty)$. În prima situaţie deducem inductiv că $f^{n+1}(x) > f^n(x) > x$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, de unde rezultă $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \infty$ şi apoi $\lim_{n\to\infty}(f^n(x) - f^n(x_0)) = \infty$, $\forall\, x \in (x_0, \infty)$, contradicţie. Ca urmare, $f(x) < x$, oricare ar fi $x \in (x_0, \infty)$.
.... **1p**

b) Fie $x, y \in (0, \infty)$. Putem presupune $f(x) < f(y)$. Notăm $x_n = f^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, respectiv $y_n = f^n(y)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $2 \leq x_n < y_n$, $n > 1$, deoarece f este strict crescătoare pe $[1, \infty)$. Demonstrăm prin inducţie proprietatea $y_n < y_1 + 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Proprietatea este verificată pentru $n = 1$. Presupunem $y_n < y_1 + 2\sqrt{n}$, pentru un număr natural nenul n. Atunci, din monotonia funcţiei f, obţinem:

$$y_{n+1} = f(y_n) < f(y_1 + 2\sqrt{n}) = y_1 + 2\sqrt{n} + \frac{1}{y_1 + 2\sqrt{n}} <$$
$$< y_1 + 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} < y_1 + 2\sqrt{n+1}.$$

.... **1p**

Rezultă $2 \leq x_n < y_n < y_1 + 2\sqrt{n} < 3\sqrt{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > y_1^2$. Din inegalitatea clasică $1 - x < e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deducem:

$$0 < y_{n+1} - x_{n+1} = f(y_n) - f(x_n) = (y_n - x_n)\left(1 - \frac{1}{x_n y_n}\right) <$$
$$< (y_n - x_n)\left(1 - \frac{1}{9n}\right) < (y_n - x_n)e^{-\frac{1}{9n}},$$

pentru $n \geq p := [y_1^2] + 1$.

Obţinem $0 < y_n - x_n < (y_p - x_p)e^{-\frac{1}{9}\sum_{k=p}^{n-1}\frac{1}{k}}$, $\forall\ n > p$.

.... **2p**

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k} = \infty$, găsim $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{9}\sum_{k=p}^{n-1}\frac{1}{k}} = 0$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(f^n(y) - f^n(x)) = 0$. Rezultă că funcţia f este contractibilă, evident fără puncte fixe.

.... **1p**

Problema 4. a) Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie derivabilă şi convexă. Arătaţi că dacă $f(x) \leq x$, oricare ar fi $x \geq 0$, atunci $f'(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \geq 0$.

b) Determinaţi funcţiile $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ derivabile şi convexe care au proprietatea că $f(0) = 0$ şi $f'(x) \cdot f(f(x)) = x$, oricare ar fi $x \geq 0$.

Soluţie. a) Presupunem contrariul. Există $a \geq 0$ cu $f'(a) > 1$, deci, cum $\lim\limits_{x\searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 1$, există $b > a$ cu $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 1$.

.... **1p**

Pentru orice $x > b$, din convexitatea funcţiei f rezultă $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = m > 1$.

.... **1p**

Atunci $f(x) \geq mx - mb + f(b)$, de unde $f(x) > x$ pentru x suficient de mare. Contradicţie.

.... **1p**

b) Vom demonstra că $f(x) = x$, oricare ar fi $x \geq 0$. Cum $f'(x) = \frac{x}{f(f(x))} > 0$, oricare ar fi $x > 0$, deducem că f este strict crescătoare. Cum f este convexă şi derivabilă, rezultă că f' este crescătoare.

Presupunem prin absurd că există $f(a) < a$. Atunci $f(f(a)) < f(a) < a$, deci $f'(a) > 1$. Conform primului punct deducem că există $b > a$ cu $f(b) = b$. Atunci $f(f(b)) = b$ şi apoi $f'(b) = 1 < f'(a)$, în contradicţie cu monotonia funcţiei f'.

.... **2p**

Rămâne $f(x) \geq x$, oricare ar fi $x \geq 0$. Atunci $f(f(x)) \geq f(x) \geq x$, de unde $f'(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \geq 0$.

Aplicând teorema lui Lagrange avem $f(x) - f(0) = xf'(c_x) \leq x$, oricare ar fi $x > 0$, de unde $f(x) = x$.

.... **2p**