Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Braşov, 2 aprilie 2013

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a IX-a

Problema 1. Un şir de numere este numit *complet* dacă are termeni naturali nenuli şi orice număr natural nenul are cel puţin un multiplu printre termenii şirului.

Arătaţi că o progresie aritmetică este şir *complet* dacă şi numai dacă raţia sa divide primul termen.

Soluţie. Dacă raţia r divide primul termen a_1, atunci $a_1 = dr$, $d \in \mathbb{N}$ şi $a_n = (d+n-1)r$, iar un multiplu al numărului natural nenul k se obţine luând $d+n-1$ multiplu de k ... **3p**

Reciproc, dacă $r = 0$, atunci şirul nu poate fi complet ... **1p**

Deoarece $r \neq 0$ şi, conform ipotezei, există un multiplu al lui r de forma $a_1 + (n-1)r$, $n \in \mathbb{N}^*$, reiese că $r \mid a_1$ ... **3p**

Problema 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de gradul al doilea, având proprietatea:

pentru orice numere reale m şi n, ecuaţia $f(x) = mx + n$ are soluţii dacă şi numai dacă ecuaţia $g(x) = mx + n$ are soluţii.

Arătaţi că funcţiile f şi g sunt egale.

Soluţie. Observăm că, dacă graficul funcţiei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = mx + n$ este tangent la graficul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = ax^2 + bx + c$, atunci ecuaţia $ax^2 + bx + c = mx + n$, $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ are discriminantul nul, deci funcţia $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k(x) = ax^2 + bx + c - mx - n$ se anulează într-un punct şi are semn constant în celelalte puncte (*) ... **1p**

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$.

Să presupunem că există x_0 astfel încât $f(x_0) < g(x_0)$. Alegem m şi n astfel încât graficul funcţiei $h(x) = mx + n$ să fie tangent la graficul lui g în punctul $(x_0, g(x_0))$. Fie $n' = n - g(x_0) + f(x_0)$. Atunci ecuaţia $f(x) = mx + n'$ are soluţia x_0 iar ecuaţia $g(x) = mx + n'$ nu are soluţii, deoarece, conform (*), $g(x) \geq mx + n > mx + n', \forall x \in \mathbb{R}$ – fals ... **3p**

Rezultă $f(x) \geq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (**). Dacă presupunem acum că există x_0 astfel încât $f(x_0) > g(x_0)$, atunci alegem din nou m şi n astfel încât graficul funcţiei $h(x) = mx + n$ să fie tangent la graficul lui g în punctul $(x_0, g(x_0))$. În acest caz, din (**) şi (*) rezultă că $f(x) > mx + n, \forall x \in \mathbb{R}$, pe când ecuaţia $g(x) = mx + n$ are soluţia x_0 – fals ... **3p**

Problema 3. Fie P un punct în interiorul unui triunghi ascuţitunghic ABC şi D, E, F intersecţiile dreptelor AP, BP, CP cu $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$.

a) Arătaţi că aria triunghiului DEF este cel mult un sfert din aria triunghiului ABC.

b) Arătaţi că raza cercului înscris în triunghiul DEF este cel mult un sfert din raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Soluţie. a) Fie $\dfrac{BD}{CD} = x, \dfrac{CE}{AE} = y, \dfrac{AF}{BF} = z$. Atunci $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{AF}{AB} \cdot \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{z}{(z+1)(y+1)}$ şi analoagele ... **1p**

Deducem $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \sum_{\text{cic}} \dfrac{z}{(z+1)(y+1)} = \dfrac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)} = \dfrac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$, deoarece, conform teoremei lui Ceva, $xyz = 1$ ... **1p**

Folosind acum inegalitatea mediilor, $\dfrac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)} \leq \dfrac{2}{8\sqrt{xyz}} = \dfrac{1}{4}$ ... **1p**

b) Se ştie că perimetrul triunghiului DEF este mai mare sau egal decât perimetrul triunghiului ortic $A'B'C'$ **1p**

Rezultă $r_{DEF} = \dfrac{S_{DEF}}{p_{DEF}} \leq \dfrac{S_{ABC}}{4p_{A'B'C'}}$ **1p**

Din $A'B' = c\cos C = R\sin 2C$, $p_{A'B'C'} = \frac{1}{2}R\sum \sin 2A = 2R\sin A\sin B\sin C$ şi $S_{ABC} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$ reiese acum concluzia **2p**

Problema 4. Considerăm un număr natural nenul n şi funcţia

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{, dacă } x \text{ este par}\\ \dfrac{x-1}{2}+2^{n-1} & \text{, dacă } x \text{ este impar}\end{cases}.$$

Determinaţi mulţimea

$$A=\{x\in\mathbb{N}\mid (\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f})(x)=x\}.$$

Soluţie. Observăm că $f(x) < x$ pentru $x \geq 2^n$, deci $A \subset \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ **2p**

Arătăm că $A = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Din $f(2^n - 1) = 2^n - 1$ deducem $2^n - 1 \in A$.

Apoi, $2f(x) \in \{x, x + 2^n - 1\}$, deci $2f(x)$ este congruent cu x modulo $2^n - 1$ **2p**

Rezultă inductiv că $x \equiv 2^n f^{[n]}(x) \equiv f(x) \pmod{2^n - 1}$. Cum $f(x) < 2^n - 1$ pentru $x < 2^n - 1$, deducem $f^{[n]}(x) = x$ dacă $x \in \{0, 1, \ldots 2^n - 2\}$ (am notat $f^{[n]} = \underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f}$). **3p**

Altă soluţie. Ca mai sus, $A \subset \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ **2p**

Pentru $x \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, îl scriem pe x în baza 2 cu n cifre, punând, dacă este cazul, zerouri la început **2p**

Atunci $f(x)$ se obţine din x prin mutarea ultimei cifre a lui x pe prima poziţie; după n compuneri cifrele lui x apar pe aceleaşi locuri ca la început, deci $f^{[n]}(x) = x$ **3p**