Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Braşov, 2 aprilie 2013

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Problema 1. În triunghiul ABC, bisectoarea AD ($D \in BC$) şi mediana BE ($E \in AC$) se intersectează în punctul P. Dreptele AB şi CP se întâlnesc în punctul F. Paralela prin B la CF intersectează dreapta DF în punctul M. Demonstraţi că $DM = BF$.

Soluţie. Din teorema lui Ceva rezultă că $\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$, de unde $\frac{BF}{FA} = \frac{BD}{DC}$. Folosind reciproca teoremei lui Thales, obţinem că $DF \| AC$. **3p**

Deoarece $\Delta BFD \sim \Delta BAC$, deducem că $\frac{BF}{BA} = \frac{FD}{AC}$, aşadar
$BF = \frac{AB}{AC} \cdot FD$. **1p**

Cum $\Delta BDM \sim \Delta CDF$, rezultă că $\frac{DM}{FD} = \frac{BD}{DC}$. Însă, din teorema bisectoarei, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, prin urmare $DM = \frac{AB}{AC} \cdot FD$.

În concluzie, $DM = BF$ **3p**

Problema 2. Un zar este un cub de muchie 1, având înscrise pe feţe cifrele de la 1 la 6, astfel încât suma cifrelor de pe oricare două feţe opuse este 7.

Folosind 27 de zaruri, construim un cub cu muchia 3.

Stabiliţi ce valori poate lua suma tuturor cifrelor de pe cele şase feţe ale cubului de muchie 3.

Soluţie. Numim *zaruri de tip* I pe cele care au o singură faţă vizibilă (acele zaruri din centrele feţelor cubului mare), *de tip* II pe cele cu două feţe vizibile (acelea din mijloacele muchiilor) şi *de tip* III pe cele cu trei feţe vizibile (zarurile din colţuri). Orice cub de muchie 3 conţine 6 zaruri de tip I, 12 zaruri de tip II şi 8 zaruri de tip III.

Suma minimă pe cele şase feţe se obţine în cazul în care pe zarurile de tip I se vede 1, pe zarurile de tip II sunt vizibile cifrele 1 şi 2, iar pe zarurile de tip III sunt vizibile 1, 2 şi 3. Suma minimă este $6 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 8 \cdot 6 = 90$.

Maximul se obţine când pe zarurile de tip I se vede 6, pe zarurile de tip II sunt vizibile 5 şi 6, iar pe zarurile de tip III sunt vizibile 4, 5 şi 6. Suma maximă este $6 \cdot 6 + 12 \cdot 11 + 8 \cdot 15 = 288$.
. . . . **2p**

Vom arăta că suma totală poate lua orice valoare intermediară între 90 şi 288. Pentru aceasta, vom pleca de la cubul în care se realizează minimul sumei şi vom roti zarurile, pas cu pas, astfel încât să mărim suma cu 1 la fiecare pas.

Rotind un zar de tip I, putem mări suma totală de pe feţele cubului mare cu câte o unitate la fiecare pas, până când pe acest zar apare 6. Continuăm acest procedeu, astfel încât pe toate zarurile de tip I să devină vizibilă faţa 6. . . . . **1p**

Rotim acum un zar de tip II de la $1+2$ la $5+6$ şi, în acelaşi timp, rotim două dintre zarurile de tip I la 1, respectiv 4; astfel am mărit suma totală cu 1. În următorii paşi rotim acele două zaruri de tip I asupra cărora am acţionat, mărind suma totală cu câte o unitate de fiecare dată; în final, pe ele va apărea din nou cifra 6. Continuăm acest procedeu, astfel încât pe toate zarurile de tip II să devină vizibile feţele 5 şi 6. .... **2p**

Apoi, rotim un zar de tip III de la $1+2+3$ la $4+5+6$, rotind în acelaşi timp două dintre zarurile de tip I la 2; astfel, am mărit suma totală cu 1. În următorii paşi rotim acele două zaruri de tip I asupra cărora am acţionat, mărind suma totală cu câte o unitate de fiecare dată; în final, pe ele va apărea din nou cifra 6. Continuăm acest procedeu, astfel încât pe toate zarurile de tip III să devină vizibile feţele 4, 5 şi 6.

Am obţinut cubul de muchie 3 având suma cifrelor de pe feţe 288. În concluzie, suma de pe feţe poate lua toate valorile de la 90 la 288. .... **2p**

Problema 3. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $5AD < 2AB$. Pe latura AB se consideră punctele S şi T astfel încât $AS = ST = TB$. Notăm cu M, N şi P proiecţiile punctelor A, S respectiv T pe dreptele DS, DT respectiv DB. Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare dacă şi numai dacă $15AD^2 = 2AB^2$.

Soluţie. Fie $AB = 3a$ şi $AD = b$, cu $b < \frac{6}{5}a$.

Folosind teorema catetei în triunghiul dreptunghic ADS, obţinem că $DM = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $MS = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exprimând în două moduri aria triunghiului DST, deducem că $SN \cdot DT = AD \cdot ST$, de unde $SN = \frac{ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$. Cu teorema lui Pitagora în triunghurile dreptunghice NSD şi NST, obţinem că $DN = \frac{2a^2+b^2}{\sqrt{4a^2+b^2}}$, respectiv $NT = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2+b^2}}$.

Procedând analog, rezultă că $TP = \frac{ab}{\sqrt{9a^2+b^2}}$, $DP = \frac{6a^2+b^2}{\sqrt{9a^2+b^2}}$, $BP = \frac{3a^2}{\sqrt{9a^2+b^2}}$. **2p**

Distanţa de la M la AB este $\frac{a^2b}{a^2+b^2}$. Distanţa de la N la AB este $\frac{NS \cdot NT}{ST} = \frac{2a^2b}{4a^2+b^2}$. Distanţa de la P la AB este $\frac{3a^2b}{9a^2+b^2}$.

Condiţia $b < \frac{6}{5}a$ implică $d(M, AB) > d(N, AB) > d(P, AB)$; atunci punctele $\{Q\} = MN \cap AB$ şi $\{Q'\} = NP \cap AB$ sunt situate pe semidreapta $(AB$ cu $T \in [AQ]$ şi $T \in [AQ']$. **1p**

Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiurile DST şi DTB, cu transversarelele $M-N-Q$, respectiv $N-P-Q'$. Obţinem că $\frac{SQ}{QT} = \frac{2a^2+b^2}{2b^2}$, iar $\frac{TQ'}{Q'B} = \frac{12a^2+2b^2}{6a^2+3b^2}$.

De aici, $QT = \frac{2ab^2}{2a^2-b^2}$ şi $Q'T = \frac{a(12a^2+2b^2)}{6a^2-b^2}$

Atunci: $M-N-P$ coliniare $\Leftrightarrow Q = Q' \Leftrightarrow TQ = TQ' \Leftrightarrow \frac{2ab^2}{2a^2-b^2} = \frac{a(12a^2+2b^2)}{6a^2-b^2} \Leftrightarrow 5b^2 = 6a^2 \Leftrightarrow 15AD^2 = 2AB^2$ **4p**

Problema 4. Fie n un număr natural nenul; considerăm mulţimea $M = \{1, 2, ..., 2n+1\}$.

Stabiliţi în câte moduri se poate partiţiona mulţimea M în trei submulţimi nevide A, B, C ($A \cup B \cup C = M, A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$) astfel încât să fie satisfăcute simultan condiţiile:

(i) pentru orice $a \in A$ şi orice $b \in B$, restul împărţirii lui a la b aparţine mulţimii C;

(ii) pentru oricare $c \in C$, există $a \in A$ şi $b \in B$ astfel încât c este restul împărţirii lui a la b.

Soluţie. Observăm că $a > b$, oricare ar fi $a \in A$ şi $b \in B$. Într-adevăr, în caz contrar, restul împărţirii lui a la b este 0 sau a, contradicţie. Rezultă că mulţimea A este alcătuită din numere naturale consecutive şi $2n + 1 \in A$. **2p**

Dacă $c \in C$, atunci există $a \in A$ şi $b \in B$ astfel încât $a = bq + c \geq 2c + 1$, prin urmare $2n + 1 \geq 2c + 1 \Leftrightarrow n \geq c$. .... **1p**.

Presupunând că $n + 1 \notin B$, rezultă $n + 1 \in A$, de unde $\{n + 1, n + 2, \ldots, 2n + 1\} \subset A$. Dacă $b \in B$, atunci $b \leq n$ şi, cum în A sunt $n + 1$ numere consecutive, se obţine că A conţine cel puţin un multiplu al lui b, contradicţie.

Ca urmare, $n+1 \in B$, deci există $k \in \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ astfel încât $A = \{2n+1, 2n, ..., k+1\}$. Din faptul că $c \leq n$ pentru orice $c \in C$, rezultă că $\{n + 1, n + 2, \ldots, k\} \subset B$. **3p**

Resturile împărţirilor elementelor din A la elementele din $\{n+1, n+2, \ldots, k\}$ sunt numerele $\{1, 2, \ldots, n\}$. Deci $B = \{n + 1, n + 2, \ldots, k\}$ şi $C = \{1, 2, \ldots, n\}$. k parcurge mulţimea $\{n + 1, n + 2, \ldots 2n\}$, deci avem n moduri de partiţionare. **1p**