Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa a III-a - 24 aprilie 2021

Subiectele și baremele – clasa a X-a

Problema 1.

Determinați numerele complexe x, y, z, de același modul, știind că numerele $x+y+z$ și $x^3+y^3+z^3$ sunt reale.

Soluție și barem. Din ipoteză avem $x = r(\cos a + i\sin a), y = r(\cos b + i\sin b), z = r(\cos c + i\sin c)$, $r, a, b, c \in \mathbb{R}, r \geq 0$ și $\sum \sin a = \sum \sin 3a = 0$. Cum $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$, obținem $\sum \sin^3 a = 0$. .... **2 puncte**
Cum $\sin a, \sin b, \sin c$ sunt soluțiile ecuației $t^3+\alpha t-\beta = 0$, unde $\alpha = \sum \sin a \sin b$, $\beta = \sin a \sin b \sin c$, rezultă $\sum \sin^3 a + \alpha \sum \sin a - 3\beta = 0$, deci $\beta = 0$. .... **3 puncte**
Presupunând $\sin a = 0$, rezultă $\sin b = -\sin c$ și obținem $\cos a = \pm 1$, $\cos b = \pm\cos c$. În concluzie, $(x, y, z) = (\pm|u|, u, -u)$ sau $(x, y, z) = (\pm|u|, u, \overline{u})$ și permutările, unde $u \in \mathbb{C}$. .... **2 puncte**
Soluție alternativă. O soluție este $x = y = z = 0$. Presupunând că $|x| = |y| = |z| = r > 0$, pentru $a = \frac{x}{r}, b = \frac{y}{r}, c = \frac{z}{r}$ avem $|a| = |b| = |c| = 1$ și $a+b+c,\ a^3+b^3+c^3 \in \mathbb{R}$. Atunci $a+b+c \in \mathbb{R} \iff a+b+c = \overline{a+b+c} \iff a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \iff abc(a+b+c) = ab+bc+ca$. .... **1 punct**
Pe de altă parte, $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a) \in \mathbb{R}$ de unde $(a+b)(b+c)(c+a) = \overline{(a+b)(b+c)(c+a)} \iff (a+b)(b+c)(c+a)((abc)^2-1) = 0$.
.... **2 puncte**
Dacă $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ se obțin soluțiile $(a, b, c) = (\pm|u|, u, -u)$, $u \in \mathbb{C}^*$. și permutările. .... **1 punct**
Dacă $abc = 1$ rezultă că a, b, c sunt soluțiile ecuației $t^3 - st^2 + st - 1 = 0$, unde $s = a+b+c$, de unde obținem $(a, b, c) = (|u|, u, \overline{u})$, $u \in \mathbb{C}^*$ și permutările.
.... **1 punct**
Dacă $abc = -1$ rezultă că a, b, c sunt soluțiile ecuației $t^3 - st^2 - st + 1 = 0$, unde $s = a+b+c$, de unde obținem $(a, b, c) = (-|u|, u, \overline{u})$, $u \in \mathbb{C}^*$ și permutările.
.... **1 punct**
În concluzie, $(x, y, z) = (\pm|u|, u, -u)$ sau $(x, y, z) = (\pm|u|, u, \overline{u})$ și permutările, unde $u \in \mathbb{C}$. .... **1 punct**

Problema 2.

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $d \neq 0$ și fie funcția $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definită prin

$$f(n) = \left[\frac{an+b}{cn+d}\right], \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

1° f este surjectivă.

2° $c = 0$, $b < d$ și $0 < a \leq d$.

Soluție și barem. $\boxed{1° \Rightarrow 2°}$ Admitem că f este surjectivă. Dacă am avea $c \neq 0$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ am avea $\frac{an+b}{cn+d} \leq \frac{an+b}{cn} = \frac{a}{c} + \frac{b}{cn} \leq \frac{a+b}{c} \Rightarrow$ $f(n) \leq \left[\frac{a+b}{c}\right]$, în contradicţie cu surjectivitatea lui f. Prin urmare, trebuie să avem $c = 0$, deci $f(n) = \left[\frac{an+b}{d}\right]$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. .... **2 puncte**
Se constată imediat că f este crescătoare. Dacă am avea $b \geq d$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ am avea $f(n) \geq f(0) = \left[\frac{b}{d}\right] \geq 1$, de unde $0 \notin \operatorname{Im} f$, în contradicţie cu surjectivitatea lui f. Drept urmare, trebuie să avem $b < d$. Evident, avem $a > 0$ (altfel, f ar fi constantă şi nu ar fi surjectivă). Deoarece $f(d) = \left[a + \frac{b}{d}\right] = a$, f este crescătoare şi surjectivă, trebuie ca $\{0, 1, \ldots, a\} \subseteq \{f(0), f(1), \ldots, f(d)\}$, de unde $a \leq d$. .... **2 puncte**

$\boxed{2° \Rightarrow 1°}$ Avem $f(0) = \left[\frac{b}{d}\right] = 0$ şi $0 \leq f(n+1) - f(n) = \left[\frac{a(n+1)+b}{d}\right] - \left[\frac{an+b}{d}\right] = \left[\frac{an+b}{d} + \frac{a}{d}\right] - \left[\frac{an+b}{d}\right] \leq 1$, de unde $f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Dacă f nu ar fi surjectivă, ar exista un $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $f(n) = \left[\frac{an+b}{d}\right] = \left[\frac{an_0+b}{d}\right] = f(n_0)$ oricare ar fi $n \geq n_0$. Dar atunci ar trebui ca pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\frac{an+b}{d} < M := \frac{an_0+b}{d} + 1$, ceea ce este absurd. Contradicţia obţinută arată că f este surjectivă. .... **3 puncte**

Problema 3.

Fie $n \geq 2$ un număr natural cu proprietatea că mulţimea rădăcinilor de ordin n ale unităţii are mai puţin de $2^{[\sqrt{n}]} - 1$ submulţimi cu suma elementelor nulă. Arătați că n este prim. (Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.)

Soluție și barem. Fie $\gamma = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, atunci $\gamma^n = 1$. Dacă n este compus, există o scriere $n = ab$ cu $a, b \geq 2$. Presupunem că $a \geq b$. Fie $A = \{\gamma^0, \gamma^a, \gamma^{2a}, ..., \gamma^{(b-1)a}\}$. Suma elementelor acestei mulţimi este $S(A) = \sum\limits_{x \in A} x = \sum\limits_{k=0}^{b-1} (\gamma^a)^k = \frac{(\gamma^a)^b - 1}{\gamma^a - 1} = 0$. .... **2 puncte**
Considerăm mulţimile $A_i = \gamma^i A = \{\gamma^i x | x \in A\}$, $i = 0, 1, ..., a-1$. Afirmăm că acestea sunt disjuncte două câte două şi fiecare are suma 0. Într-adevăr, $S(A_i) = \sum\limits_{x \in A_i} x = \gamma^i \sum\limits_{x \in A} x = 0$. Existenţa unui $x \in A_i \cap A_j, i \neq j$ implică $x = \gamma^i \gamma^{ak} = \gamma^j \gamma^{ap}$ pentru $i, j \in 0, 1, ..., a-1$ şi $k, p \in 0, 1, ..., b-1$. Atunci $\gamma^{i+ak-j-ap} = 1$, deci $n | i+ak-j-ap$. Cum $|i+ak-j-ap| \leq |i-j| + a|k-p| \leq a-1+a(b-1) = ab-1 = n-1$ rezultă că $i + ak = j + ap$, deci $a | i - j$. Dar cum $|i-j| \leq a-1$ rezultă $i = j$, contradicţie. .... **3 puncte**
Atunci mulţimile din setul $S = \{\bigcup\limits_{k \in M} A_k | M \subset \{0, 1, ..., a-1\}\}$ sunt diferite două câte două şi au suma elementelor 0. Acestea sunt în număr de $2^a - 1$, dar cum $a \geq b \Rightarrow a^2 \geq n$, deci $a \geq \sqrt{n}$ iar $2^a - 1 \geq 2^{[\sqrt{n}]} - 1$, contradicţie. Deci n este prim.

. . . . **2 puncte**

Problema 4.

Determinați numerele întregi nenule a pentru care există funcţiile $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ care verifică ecuaţia funcţională:

$$f(x + g(y)) = g(x) + f(y) + ay, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Determinați toate aceste funcţii.

Soluție și barem. Arătăm că a este produs de doi întregi consecutivi nenuli. Observăm că dacă (f, g) este soluţie şi $c \in \mathbb{Q}$, atunci $(f + c, g)$ este soluţie, astfel că putem presupune $f(0) = 0$.
Dacă în (1) punem $(x, y) \mapsto (-g(0), 0)$ rezultă $g(-g(0)) = 0$.
Dacă în (1) punem $(x, y) \mapsto (-g(0), -g(0))$ rezultă $ag(0) = 0$ deci $a = 0$ sau $g(0) = 0$. În cazul $a \neq 0$ continuăm cu $g(0) = 0$, $f(0) = 0$.
Dacă în (1) punem $y = 0$ rezultă $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{Q}$ şi revenind în (1) obţinem:

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y) + ay, \ x, y \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

. . . . **2 puncte**
Punem în (2), $(x, y) \mapsto (x - f(x), x)$ şi obţinem $f(x - f(x)) = -ax, \ x \in \mathbb{Q}$, deci f este surjectivă.
Punem în (2), $x = 0$ şi obţinem: $f(f(y)) = f(y) + ay, \ y \in \mathbb{Q}$. Folosind (2) rezultă $f(x + f(y)) = f(x) + f(f(y))$ şi cum f este surjectivă rezultă $f(x + z) = f(x) + f(z), \ \forall \ x, z \in \mathbb{Q}$. Deci f este aditivă, prin urmare $f(x) = \alpha x, \ \forall \ x \in \mathbb{Q}, \ \alpha \in \mathbb{Q}^*$.
. . . . **3 puncte**
Revenind în (2) obţinem: $\alpha(x + \alpha y) = \alpha x + \alpha y + ay, \ \forall \ x, y \in \mathbb{Q}$ deci $\alpha^2 - \alpha - a = 0$.
Avem $\alpha_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2} \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{1 + 4a} \in \mathbb{Z}$, prin urmare $a = k(k + 1), \ k \in \mathbb{N}^*, \ \alpha_1 = k + 1, \ \alpha_2 = -k$.
În concluzie, $a = k(k + 1), \ k \in \mathbb{N}^*$ iar perechile de funcţii sunt $f(x) = (k + 1)x + c, \ g(x) = (k + 1)x$ și $f(x) = -kx + c, \ g(x) = -kx$ unde $k \in \mathbb{N}^*, \ c \in \mathbb{Q}$.
. . . . **1 punct**
Aceste funcții verifică relația din enunț. . . . . **1 punct**
Observație. Pentru găsirea, fără argumentare, a tuturor numerelor întregi a și a funcțiilor asociate, se va acorda 1 punct.