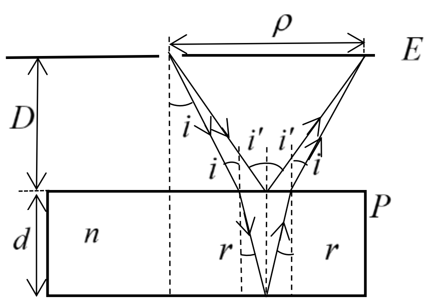
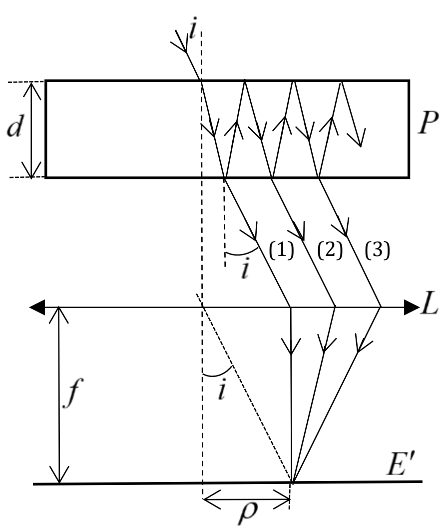
	Barem Subiectul I Inele de interferență	**Parțial**	**Punctaj**
A1.	Legea refracției la intrarea în lamă: $\sin i = n.\sin r$ (1)	0,5 p	**9 p**
	Pentru unghiuri mici: $i \simeq nr$ (2)	0,5 p	
			
	Distanța pe ecran de la centrul diafragmei la punctul de suprapunere a undelor reflectate: $\rho = 2D\cdot \mathrm{tg}i + 2d\cdot \mathrm{tg}r \simeq 2(D + d/n)i \simeq 2Di \Rightarrow i \simeq \frac{\rho}{2\left(D + d/n\right)}$ (3)	0,5 p	
	$\rho = 2D\cdot \mathrm{tg}i' \simeq 2Di' \Rightarrow i' \simeq \frac{\rho}{2D}$ (4)	0,5 p	
	Diferența de drum optic dintre razele reflectate pe fețele inferioară și superioară ale lamei, care interferă pe ecranul E: $\delta = (r_1) - (r_2)$ (5)	0,5 p	
	unde: $(r_1) = 2D/\cos i + 2nd/\cos r \simeq 2D\left(1 + \frac{i^2}{2}\right) + 2nd\left(1 + \frac{i^2}{2n^2}\right) = 2\left(D + nd\right) + i^2\left(D + \frac{d}{n}\right)$	1 p	
	(6) $(r_2) = 2D/\cos i' - \lambda/2 \simeq 2D\left(1 + \frac{i'^2}{2}\right) - \lambda/2$ (7)	1 p	
	$\xrightarrow{(3-7)} \delta \simeq 2nd + \frac{\lambda}{2} - \frac{\rho^2 d}{4nD^2}$ (8)	1 p	
	Condiția de minim de interferență: $\delta = (2k+1)\lambda/2,\ k \in \mathbb{Z}$ (9)	0,5 p	
	$\xrightarrow{8,9} \rho^2_{\min,k} = \frac{4nD^2}{d}\left(2nd - k\lambda\right)$, raza inelului de minimă intensitate luminoasă (întunecat) de ordin k (10)	0,5 p	
	Prin urmare: $\rho_1^2 = \rho^2_{\min,k_1} = \frac{4nD^2}{d}\left(2nd - k_1\lambda\right); \rho_2^2 = \rho^2_{\min,k_2} = \frac{4nD^2}{d}\left(2nd - k_2\lambda\right)$ (11)	1 p	
	Prin scăderea relațiilor (11), observând că: $k_1 - k_2 = m + 1$, rezultă: $\lambda = \frac{d\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)}{4nD^2\left(m+1\right)}$; (12)	1 p	
	Numeric: $\lambda = 600$ nm	0,5 p	

A2.	Condiția de maxim de interferență: $\delta = 2k\,{\lambda}/{2},\ k \in \mathbb{Z}$ (13)	0,5 p	**4 p**
	$\xrightarrow{(8),(13)} \rho^2_{\max,k} = \dfrac{2nD^2\lambda}{d}\left(\dfrac{4nd}{\lambda} - 2k + 1\right)$ (14)	1 p	
	Pentru valorile numerice date: $4nd/\lambda = 3600$ rezultă valoarea minimă a razei unui inel luminos, pentru ordinul de interferență $k = 1800\ :\ \rho_{\min} = D\sqrt{\dfrac{2n\lambda}{d}}$, numeric: $\rho_{\min} \simeq 1,4\ \text{cm}$	0,5 p 1,5 p 0,5 p	
B1.	Razele inelelor de interferență formate pe ecran, în funcție de unghiul de incidență pe lamă: $\rho = f \cdot \text{tg}i \simeq f \cdot i$ (15)	0,5 p	**8 p**
			
	Diferența de drum dintre două raze de lumină adiacente care părăsesc lama și interferă pe ecran: $\delta = {2nd}/{\cos r} - 2d \cdot \text{tg}r \cdot \sin i = 2nd\cos r$ (16) În aproximația unghiurilor mici, $i, r \ll 1\ rad$: $\cos r \simeq 1 - \dfrac{r^2}{2}$; $r \simeq \sin r = \dfrac{\sin i}{n} \simeq \dfrac{i}{n}$ $\delta \simeq 2nd\left(1 - \dfrac{r^2}{2}\right) \simeq 2nd\left(1 - \dfrac{i^2}{2n^2}\right) = 2nd - \dfrac{di^2}{n}$ (17)	1 p 0,5 p 1 p	
	Razele de lumină emergente din lamă sub același unghi i, vor fi focalizate de lentilă în același punct al ecranului E' iar în urma suprapunerii dau naștere unor franje de maxim de interferență având forma unor cercuri concentrice de raze ρ'. $\xrightarrow{(13),(15),(17)} \rho_1'^2 = \dfrac{nf^2}{d}(2nd - k_1'\lambda);\ \rho_2'^2 = \dfrac{nf^2}{d}(2nd - k_2'\lambda)$ (18)	2 p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

	Prin scăderea relațiilor (18), folosind relația: $m' = k_1' - k_2'$, găsim: $f = \sqrt{\dfrac{d\left(\rho_2'^2 - \rho_1'^2\right)}{n\lambda m'}}$ Numeric $f = 30$ cm	1 p 0,5 p	
	$0 \le \rho'^2 = \dfrac{nf^2\lambda}{d}\left(\dfrac{2nd}{\lambda} - k'\right) \le \rho_1'^2 \Rightarrow \dfrac{2nd}{\lambda} - \dfrac{\rho_1'^2 d}{nf^2\lambda} \le k' \le \dfrac{2nd}{\lambda}$ Numeric: $1796 \le k' \le 1800$ deci pe ecran se formează un total de 5 franje luminoase.	1 p 0,5 p	
B2.	La incidența pe oricare din fețele lamei transparente au loc simultan fenomenul de reflexie și de refracție. Intensitățile undelor reflectate respectiv transmise sunt legate de intensitatea fasciculului incident prin relațiile: $I_{reflectat} = R.I_{incident};\ I_{transmis} = (1-R).I_{incident}$ (19) Dar intensitatea undei este proporțională cu pătratul amplitudinii intensității câmpului electric al undei: $I = const.E^2 \Rightarrow E_{reflectat} = \sqrt{R}.E_{incident};\ E_{transmis} = \sqrt{1-R}.E_{incident}$ (20)	0,5 p 1 p	**9 p**
	Notăm cu $E_1, E_2, ..., E_n$ amplitudinea intensităților câmpurilor electrice ale undelor emergente din lamă, paralele între ele și focalizate de lentilă în același punct al ecranului. $E_1 = E_0(1-R);\ E_2 = E_0R(1-R);\ E_3 = E_0R^2(1-R)...\ E_n = E_0R^{n-1}(1-R)$ (21) unde E_0 este amplitudinea intensității câmpului electric al undei incidente pe lamă.	1 p	
	Diferența de fază dintre oscilațiile a două raze de lumină adiacente, emergente din lamă, este $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}\delta$. Folosind metoda fazorială de compunere a oscilațiilor, componentele amplitudinii intensității câmpului electric rezultat din suprapunerea oscilațiilor undelor de amplitudine $E_1, E_2, ..., E_n$ sunt date de: $E_x = E_1 + E_2.\cos\Delta\varphi + ...E_n.\cos(n-1)\Delta\varphi + ...$ $E_y = E_2.\sin\Delta\varphi + E_3.\sin 2\Delta\varphi + ...E_n.\sin(n-1)\Delta\varphi + ...$ Folosind relațiile (21) găsim: $E_x = E_0(1-R)\sum_{n=0}^{\infty} R^n.\cos n\Delta\varphi = E_0(1-R).\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right\} = E_0(1-R).\mathrm{Re}\left\{\dfrac{1}{1-z}\right\}$ $E_y = E_0(1-R)\sum_{n=0}^{\infty} R^n.\sin n\Delta\varphi = E_0(1-R).\mathrm{Im}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right\} = E_0(1-R).\mathrm{Im}\left\{\dfrac{1}{1-z}\right\}$ unde $z = R(\cos\Delta\varphi + i\sin\Delta\varphi)$ Găsim final: $E_x = E_0 \cdot \dfrac{(1-R)(1-R.\cos\Delta\varphi)}{1+R^2-2R.\cos\Delta\varphi}$ și $E_y = E_0 \cdot \dfrac{(1-R)\cdot R\sin\Delta\varphi}{1+R^2-2R.\cos\Delta\varphi}$ Intensitatea franjei de interferență: $I \sim E^2 = E_x^2 + E_y^2 \Rightarrow I = I_0.\dfrac{(1-R)^2}{1+R^2-2R.\cos\Delta\varphi}$	0,5 p 1 p 1 p 0,5 p 0,5 p 1 p 0,5 p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

	Intensitatea franjelor corespunzătoare unui maxim de interferență: $I_{\max} = I_0$ Iar cea corespunzătoare unui minim de interferență: $I_{\min} = I_0 \cdot \left(\dfrac{1-R}{1+R}\right)^2$ Final: $\dfrac{I_{\min}}{I_{\max}} = \left(\dfrac{1-R}{1+R}\right)^2$; numeric: $\dfrac{I_{\min}}{I_{\max}} \simeq 2{,}8.10^{-3}$	0,5 p 0,5 p 0,5 p	
Total subiectul I			**30**

Barem Subiectul II: ***Un dispozitiv de tip Fizeau***	**Parțial**	**Punctaj**
a. În absența curgerii lichidului prin cuva B, viteza de propagare a luminii în cele două cuve este aceeași, între cele două fascicule nu există diferență de timp, ele ajung în fază în punctul O de pe ecran, respectiv aici se obține franja centrală strălucitoare, respectiv iluminare maximă.		**7,5p**
Deoarece cuvele sunt fixe, atunci când lichidul curge prin cuva B, se modifică doar durata de propagare a luminii în această cuvă, respectiv diferența de fază dintre fascicule este produsă exclusiv de diferența duratelor (timpilor) de traversare prin cele două lichide, parcursul celor două fascicule prin aer fiind același.	1p	
În cuva A lichidul este în repaus, deci viteza luminii în acest lichid este $v_A = \frac{c}{n}$. Durata (timpul) de traversare a cuvei A este: $$T_A^{(\ell)} = \frac{l}{c/n} = \frac{nl}{c}$$	0,5p	
Pentru lichidul din cuva B: În sistemul de referință propriu al lichidului, viteza luminii este $$v' = \frac{c}{n}$$	0,5p	
În sistemul de referință al laboratorului, lichidul are viteza u, deci folosim regula de compunere relativistă a vitezelor: $$v_B = \frac{v' + u}{1 + \frac{v'u}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u}{nc}}.$$	1p	
Deoarece pereții cuvei sunt în repaus nu apare contracția lungimii cuvei. Ca urmare, în sistemul laboratorului, drumul parcurs de lumină prin lichidul din cuva B rămâne tot l, deci durata (timpul) de traversare a cuvei B este: $$T_B^{(\ell)} = \frac{l}{v_B}$$	1p	
$$T_B^{(\ell)} = l\,\frac{1 + \frac{u}{nc}}{\frac{c}{n} + u} = \frac{nl}{c}\,\frac{1 + \frac{u}{nc}}{1 + \frac{nu}{c}}$$	0,5p	
Diferența de timp dintre cele două fascicule: $$\Delta t = T_A^{(\ell)} - T_B^{(\ell)}$$	0,5p	
$$\Delta t = \frac{nl}{c}\left(1 - \frac{1 + \frac{u}{nc}}{1 + \frac{nu}{c}}\right) = \frac{l\,u\,(n^2 - 1)}{c^2(1 + \frac{nu}{c})}$$	0,5p	
Deoarece $u << c$ putem aproxima: $$\Delta t \cong (n^2 - 1)\frac{l\,u}{c^2}$$	0,5p	
La sosirea în punctul O, diferența de fază dintre cele două fascicule luminoase este $$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$	0,5p	
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot \frac{l\,u\,(n^2 - 1)}{c^2(1 + \frac{nu}{c})}$$	0,5p	

Pentru $u \ll c$: $$\Delta\varphi \cong \frac{2\pi\, l\, u\,(n^2-1)}{\lambda c}$$	0,5p	
b. În absența curgerii lichidului prin cuva B , diferența de drum optic dintre cele două unde luminoase este $\Delta r_0 = k\lambda$, deoarece în punctul O iluminarea este maximă. Când lichidul curge prin cuva B diferența totală de drum optic este: $$\Delta r_0 + \Delta r = (k+\Delta k)\lambda$$	1p	**3,5p**
Diferența suplimentară de drum optic fiind $\Delta r = \Delta k \cdot \lambda$, găsim variația ordinului de interferență: $$\Delta k = \frac{\Delta r}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{l\, u\,(n^2-1)}{\lambda(c+nu)}$$	1p	
Pentru $u \ll c$: $$\Delta k = (n^2-1)\frac{u}{c}\frac{l}{\lambda}$$	1p	
$$\Delta k \cong 0{,}42\ franje$$	0,5p	
c. Pentru ca în punctul O să se observe întuneric total trebuie ca diferența de fază dintre cele două unde luminoase ajunse în acest punct să fie $$\Delta\varphi = (2k+1)\pi$$	1p	**4p**
Pentru $u \ll c$: $$\Delta\varphi \cong \frac{2\pi\, l\, u\,(n^2-1)}{\lambda c} = (2k+1)\pi$$	0,5p	
Valoarea minimă a vitezei de curgere lichidului se obține pentru $k = 0$, respectiv $$\Delta\varphi = \pi$$	1p	
$$u_{min} \cong \frac{\lambda c}{2l(n^2-1)}$$	1p	
$$u_{min} = 12\ \mathrm{m/s}$$	0,5p	
d. Vom nota cu D drumul geometric $L_1O_2 = O_1L_2$ măsurat în sistemul de referință al laboratorului (aceeași valoare D pe ambele ramuri ale dispozitivului). Diferența de fază dintre cele două unde luminoase provine din diferența duratelor de parcurs ale luminii pe porțiunile L_1O_2 și O_1L_2.		**15p**
Pentru ramura ce conține cuva A, aflată în repaus:		
Durata (timpul) în lichid: $$T_A^{(l)} = \frac{nl}{c}$$	0,5p	
Durata (timpul) în aer: $$T_A^{(a)} = \frac{D-l}{c}$$	0,5p	
Durata totală a parcursului luminii pe ramura L_1O_2 va fi: $$T_A = \frac{nl}{c} + \frac{D-l}{c} = \frac{D}{c} + (n-1)\frac{l}{c}$$	0,5p	
Cuva B este etanșată, lichidul din cuva B este în repaus față de cuvă și întreaga cuvă se deplasează ca ansamblu cu viteza constantă u, de-a lungul fasciculului luminos. În această situație, în sistemul de referință al laboratorului, trebuie să ținem cont de: • *contracția lungimii cuvei B;* • *viteza de propagare a luminii în lichidul din cuva mobilă, măsurată față de sistemul laboratorului;*		

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

• *durata de parcurs a luminii în cuva mobilă, măsurată față de sistemul laboratorului;* • *faptul că, în timpul propagării luminii în cuvă, cuva se apropie de lama L_2, deci porțiunea rămasă de drum în aer, de la ieșirea luminii din cuva mobilă și până la lama L_2, devine mai scurtă.*		
Pentru ramura ce conține cuva B, aflată în mișcare uniformă față de sistemul laboratorului, durata totală a parcursului luminii pe porțiunea O_1L_2 se compune din durata de parcurs a luminii prin lichidul din cuva mobilă, măsurată în sistemul laboratorului și din durata de parcurs a luminii prin aer: $$T_B = T_B^{(l)} + T_B^{(a)}$$	0,5p	
Calculul duratei (timpului) $T_B^{(l)}$ de parcurs al luminii prin lichidul din cuva mobilă, măsurat în sistemul de referință al laboratorului(*traversarea cuvei*):		
În sistemul propriu al cuvei B, cuva este în repaus, lungimea ei este l , iar viteza de propagare a luminii în lichid este $v' = \frac{c}{n}$.	0,5p	
În acest sistem de referință există două evenimentele relevante: E_1=lumina intră în capătul stâng al cuvei și E_2=lumina iese prin capătul drept al cuvei, iar timpul dintre acestea, respectiv durata propagării luminii în cuvă, este $\Delta t' = \frac{nl}{c}$.	1p	
Tot în sistemul propriu al cuvei aceste două evenimente au separarea spațială $$\Delta x' = l$$	1p	
Aplicăm transformarea Lorentz pentru intervalul de timp dintre cele două evenimente pentru a găsi timpul de parcurs al luminii prin lichidul din cuva mobilă, $T_B^{(l)}$, măsurat în sistemul laboratorului, utilizând $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$.		
Deoarece în sistemul de referință propriu al cuvei evenimentele „intrare” și „ieșire” nu au loc în același punct al cuvei, trebuie folosită transformarea Lorentz completă pentru intervalul de timp dintre cele două evenimente, respectiv nu este vorba despre o simplă dilatare temporală: $$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2}\right)$$	1,5p	
Înlocuind, obținem $$\Delta t = \gamma\left(\frac{nl}{c} + \frac{ul}{c^2}\right)$$ $$T_B^{(l)} = \Delta t = \frac{nl}{c}\gamma\left(1 + \frac{u}{nc}\right)$$	1p	
O altă abordare: În sistemul laboratorului lungimea cuvei suferă o contracție pe direcția de mișcare: $$L = l\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{l}{\gamma}$$ Viteza de propagare a luminii în lichid, măsurată față de sistemul laboratorului este: $$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{v'u}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + u}{1 + \frac{u}{nc}}$$ Lumina trebuie să ajungă la peretele din stânga al cuvei, care „fuge” în aceeași sens, deci viteza de apropiere dintre lumină și peretele frontal este $(v - u)$ iar durata de traversare a cuvei, în sistemul laboratorului, este:		

$$T_B^{(l)} = \frac{L}{v-u}$$ Calculăm $(v-u)$: $$v-u=\frac{\frac{c}{n}+u}{1+\frac{u}{nc}}-u=\frac{\frac{c}{n}-\frac{u^2}{nc}}{1+\frac{u}{nc}}=\frac{c}{n}\cdot\frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{1+\frac{u}{nc}}$$ Putem scrie $$v-u=\frac{c}{n}\cdot\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{u}{nc}}$$ respectiv: $$\frac{1}{v-u}=\frac{n}{c}\gamma^2\left(1+\frac{u}{nc}\right)$$ Ca urmare: $$T_B^{(l)}=\frac{nl}{c}\gamma\left(1+\frac{u}{nc}\right)$$		
Calculul duratei (timpului) $T_B^{(a)}$ de parcurs a luminii prin aer pe porțiunea O_1L_2, măsurată în sistemul de referință al laboratorului: Acest interval de timp se compune din: • $t_1 = t_{stânga}$ = durata de parcurs a luminii pe traseul din stânga, de la punctul de incidență pe oglinda O_1 până la întâlnirea cuvei; • $t_2 = t_{dreapta}$ = durata de parcurs a luminii pe traseul din treapta, de la ieșirea din cuvă și până la lama L_2.	0,5p	
Notăm cu a distanța de la punctul de incidență a luminii pe oglinda O_1 până la fața de intrare a cuvei B, la momentul inițial $t_0 = 0$. În timpul t_1 cuva se deplasează spre dreapta pe distanța $x_1 = ut_1$, iar pentru lumină putem scrie: $$t_1=\frac{a+ut_1}{c}$$ respectiv lumina are mai întâi de „prins” fața de intrare a cuvei, trebuie să ajungă din urmă cuva care se mișcă. Altfel spus: $$t_1=\frac{a}{c-u}$$	1,5p	
În timpul $T_B^{(l)}$ cuva se deplasează, suplimentar, spre dreapta pe distanța $x_2 = uT_B^{(l)}$, adică drumul rămas de parcurs prin aer, după ieșirea din cuvă, se scurtează. Putem scrie: $$t_2=\frac{D-a-L-ut_1-uT_B^{(l)}}{c}$$	1p	
Ca urmare durata totală de parcurs al luminii pe traseul O_1L_2 va fi: $$T_B = t_1 + T_B^{(l)} + t_2$$	0,5p	
$$T_B = t_1 + T_B^{(l)} + \frac{D-a-L-ut_1-uT_B^{(l)}}{c}$$ Grupăm termenii și obținem: $$T_B=\left(1-\frac{u}{c}\right)t_1+\left(1-\frac{u}{c}\right)T_B^{(l)}+\frac{D-a-L}{c}$$ Putem scrie:		

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

$$\left(1-\frac{u}{c}\right)t_1=\frac{(c-u)t_1}{c}=\frac{a}{c}$$ Prin urmare: $$T_B=\frac{a}{c}+\frac{D-a-L}{c}+\left(1-\frac{u}{c}\right)T_B^{(l)}=\frac{D-L}{c}+\left(1-\frac{u}{c}\right)T_B^{(l)}$$		
După calcule obținem: $$T_B=\frac{D}{c}+(n-1)\,\gamma\frac{l}{c}\left(1-\frac{u}{c}\right)$$	1,5p	
Diferența de timp (durată) dintre cele două unde luminoase la sosirea în punctul O este: $$\Delta T=T_A-T_B$$	0,5p	
$$\Delta T=\left[\frac{D}{c}+(n-1)\frac{l}{c}\right]-\left[\frac{D}{c}+(n-1)\,\gamma\frac{l}{c}\left(1-\frac{u}{c}\right)\right]$$		
respectiv: $$\Delta T=(n-1)\,\frac{l}{c}\left[1-\gamma\left(1-\frac{u}{c}\right)\right]$$	1p	
Pentru $u \ll c$, după calcule putem aproxima diferența de timp: $$\Delta T\cong(n-1)\frac{lu}{c^2}$$	0,5p	
Diferența de fază dintre cele două unde luminoase la sosirea în punctul O de pe ecran: $$\Delta\varphi=\omega\,\Delta T$$	0,5p	
$$\Delta\varphi=\frac{2\pi c}{\lambda}\cdot(n-1)\frac{lu}{c^2}$$		
$$\Delta\varphi=2\pi(n-1)\frac{lu}{\lambda c}$$	0,5p	
Total Subiectul II		**30 p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

Barem Subiectul III: Orbită cuantificată într-un câmp central		Parțial	Punctaj
a)	Energia totală a sistemului este suma dintre energia cinetică a particulei cu masa redusă μ și energia potențială a sistemului proton-neutron: $$E = K + U(r)$$ $$E = \frac{\mu v^2}{2} - g^2\frac{e^{-r/\lambda}}{r}$$	1 1	**2,0 p**
b)	Forța de atracție este dată de relația: $$F = -\frac{dU(r)}{dr}$$	1	**6,0 p**
	$$F = -g^2\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2}\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)$$	3	
	Această forță trebuie să joace rol de forță centripetă: $$F_c = \frac{\mu v^2}{r}$$	1	
	$$\frac{\mu v^2}{r} = g^2\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2}\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)$$	1	
c)	Din relația găsită la punctul b), putem exprima energia cinetică: $$K = \frac{\mu v^2}{2} = g^2\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{2r}\left(1+\frac{r}{\lambda}\right)$$	1	**6,0 p**
	Energia totală pentru orbita n de rază r_n devine: $$E_n = K + U(r_n)$$	1	
	$$E_n = g^2\frac{e^{-\frac{r_n}{\lambda}}}{2r_n}\left(\frac{r_n}{\lambda}-1\right)$$	2	
	Conform formulei de cuantificare Bohr, momentul cinetic orbital este: $$L = \mu v r_n = n\hbar$$	2	
d)	Din expresia pentru momentul cinetic, se obține: $$v = \frac{n\hbar}{\mu r_n}$$	1	**12 p**
	Din expresia pentru forța centripetă rezultă: $$g^2 e^{-\frac{r_n}{\lambda}} = \frac{n^2\hbar^2}{\mu r_n\left(1+\frac{r_n}{\lambda}\right)}$$	1	
	Substituind în relația pentru energia totală E_n, se obține: $$E_n = \frac{n^2\hbar^2}{2\mu r_n^2}\cdot\frac{\frac{r_n}{\lambda}-1}{\frac{r_n}{\lambda}+1}$$	1	
	Pentru starea fundamentală: $n = 1$, $r_1 = x_1\lambda$ și $E_1 = -E_b$.	1	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.

	$E_b = \dfrac{\hbar^2}{2\mu\lambda^2 x_1^2}\cdot\dfrac{1-x_1}{1+x_1}$	1	
	Notăm $C = \dfrac{\hbar^2}{2\mu\lambda^2 E_b}$	1	
	Se obține ecuația polinomială: $x_1^3 + x_1^2 + Cx_1 - C = 0$	1	
	Din valorile numerice, rezultă: $\lambda \approx 1{,}430\ \text{fm}$ $C \approx 9{,}145$	0,5 0,5	
	Ecuația polinomială devine: $x_1^3 + x_1^2 + 9{,}145x_1 - 9{,}145 = 0$	1	
	Prin testarea valorilor sau prin metode numerice simple de aproximație, se observă că rădăcina reală se află în preajma valorii: $x_1 \approx 0{,}853$	2	
	Demonstrație: Putem rescrie ecuația polinomială în forma: $x = \dfrac{9{,}145}{x^2 + x + 9{,}145}$ Începem cu o valoare de pornire logică $x_0 = 1$ și calculăm iterativ x_{n+1}, folosind valoarea anterioară x_n. Astfel, $x_1 = 0{,}820$, $x_2 = 0{,}859$, $x_3 = 0{,}851$, $x_4 = 0{,}853$. Se observă că valoarea se va stabiliza la 0,853.		
	Astfel, raza primei orbite este: $r_1 \approx 1{,}22\ \text{fm}$	1	
e)	Din relațiile anterioare, rezultă: $g^2 = \dfrac{\hbar^2}{\mu r_1(1+x_1)}\cdot e^{x_1}$	2	**4,0 p**
	Se obține valoare numerică: $g^2 \approx 86{,}2\ \text{MeV}\cdot\text{fm}$	2	
Total Subiectul III			**30 p**

Oficiu		**10**

Barem propus de:
prof. Cristian MIU *– Colegiul Național „Ion Minulescu” Slatina*
prof. Florin BUTUȘINĂ *– Colegiul Național “Simion Bărnuțiu”, Șimleu Silvaniei*
prof. Adrian BODNĂRESCU *– Colegiul Național „Eudoxiu Hurmuzachi”, Rădăuți*
prof. Liviu BLANARIU*, CNCE, București* - coordonator

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul final va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu ponderea ideilor corecte din rezolvarea elevului.